



# Étude théorique et numérique de l'expansion dans le vide d'un plasma créé par laser : cas d'une fonction de distribution des électrons bi-Maxwellienne

Abdourahmane Diaw

## ► To cite this version:

Abdourahmane Diaw. Étude théorique et numérique de l'expansion dans le vide d'un plasma créé par laser : cas d'une fonction de distribution des électrons bi-Maxwellienne. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Ecole Polytechnique X, 2013. Français. NNT : . pastel-00789762

**HAL Id: pastel-00789762**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00789762>**

Submitted on 18 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : physique des plasmas

par

**Abdourahmane Diaw**

**Étude théorique et numérique de l'expansion dans le vide d'un  
plasma créé laser : cas d'une fonction de distribution des électrons  
bi-Maxwellienne**

soutenue le 28 janvier 2013 devant le jury composé de :

M. Gilles Maynard	<i>Rapporteur (LPGP, Orsay)</i>
M. Erik Lefebvre	<i>Rapporteur (CEA, Bruyères-le-Châtel)</i>
M. Victor Malka	<i>Président du jury (LOA, Palaiseau)</i>
M. Vladimir Tikhonchuk	<i>Examineur (CELIA, Bordeaux)</i>
M. Patrick Mora	<i>Directeur de thèse (CPHT, Palaiseau)</i>



# Résumé

Cette thèse constitue une étude théorique et numérique de la détente d'un plasma dans le vide. Elle fournit une compréhension globale des mécanismes d'expansion de plasmas avec une fonction de distribution des électrons bi-Maxwellienne (avec une température d'électrons « chaude » et une température « froide »). Dans la première partie, on étudie les caractéristiques (amplitude, position, structure microscopique, etc.) du choc de raréfaction qui apparaît dans le plasma si le rapport des températures chaude et froide est supérieure à 9.9. Cette étude est réalisée avec un modèle semi-infini ; le plasma est une source infinie de particules et d'énergie. Les expressions analytiques des grandeurs de l'écoulement sont établies. Le comportement de la structure du plasma pour les différents régimes d'expansion est précisé. Les effets du choc de raréfaction sur l'accélération des ions sont brièvement étudiés. Les simulations numériques effectuées avec un code hybride 1- $D$  sont comparés aux résultats du modèle analytique. Dans la seconde partie, on évoque l'expansion d'une feuille mince avec un code cinétique unidimensionnel. Contrairement au modèle de plasma semi-infini, la fonction de distribution des électrons n'est pas maintenue Maxwellienne dans le temps, mais sa dynamique est gouvernée par l'équation de Vlasov. Cette description permet de tenir compte des transferts d'énergie entre les composantes chaude, froide et les ions. Les résultats de ce code sont utilisés pour comprendre le chauffage initial des électrons froids qui se produit dans les plasmas dominés initialement par les électrons chauds. Une expression de la température froide au cours de l'accélération de l'onde de raréfaction est établie. Pour un plasma avec des paramètres initiaux similaires à ceux obtenus lors de l'interaction d'une impulsion laser ultra-intense avec une cible, on met en évidence un refroidissement global des électrons sur des échelles de temps différentes, puis une réduction de l'amplitude du choc de raréfaction (et du creusement du spectre des ions).

# Abstract

A comprehensive theory is developed to describe the expansion of a plasma into vacuum with a two-temperature electron distribution function (a « cold » and a « hot » electron population). In the first part, the characteristics (amplitude, position, microscopic structure, etc.) of the rarefaction shock which occurs in the plasma when the hot- to the cold-electron temperature ratio is larger than 9.9 are investigated with a semi-infinite plasma; i.e., an infinite source of particles and energy. Asymptotic expressions of the quantities of the flow are established in the limit of large temperature ratios. The behavior of the plasma structure is specified for different regimes of flow. The effects of the rarefaction shock on the ion acceleration are briefly discussed. The numerical simulations performed with a 1- $D$  hybrid code are compared to the results of the analytical model. In the second part, we study the expansion into a vacuum of a thin-foil with a 1- $D$  kinetic code. Conversely to the semi-infinite model, the electron distribution function does not stay bi-Maxwellian in time, but its dynamic is governed by Vlasov equation. The results of this code are used to explain the heating of the cold electrons, for a sufficiently large hot- to cold-electron density ratio. An expression of the cold temperature, during the acceleration of the rarefaction wave towards the center of the foil, is established. The maximum temperature gain is estimated in terms of the initial plasma parameters. For low values of the hot- to cold-electron density ratio, we evidence a global cooling of electrons over different time scales and then a reduction of the effective amplitude of the rarefaction shock.

# Remerciements

Je voudrais ici exprimer ma gratitude envers tous ceux sans qui ce travail n'aurait pas été possible.

Je remercie mon directeur de thèse, Patrick Mora, pour l'aide précieuse, sa patience, les conseils et le temps qu'il m'a prodigués depuis trois ans.

Ma gratitude va également à Erik Lefebvre et à Gilles Maynard d'avoir accepté d'écrire les rapports de ma thèse, leurs remarques et leurs corrections ont rendu ce manuscrit plus agréable à lire.

Je remercie Victor Malka et Vladimir Tikhonchuk d'avoir accepté de faire parti de mon jury de thèse.

Je remercie Anne Héron, Stefan Hueller et Arnaud Couairon pour leurs encouragements et leurs conseils.

Je suis reconnaissant au personnel du Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique de leur accueil chaleureux, les secrétaires, Florence Auger, Malika Lang, Jeannine Thomas et Fadila Debbou (merci encore pour le gâteau !) et les informaticiens Danh Pham Kim et Jean-Luc Bellon.

Je remercie mes compagnons de labeur, les thésards du labo, David Leblond, Valentina Pozzoli, Valentin Verschinin, Lucien Heurtier et Benjamin Leveque d'avoir rendu mon travail moins austère.

Je remercie enfin tous mes lecteurs de bonne volonté mon directeur de thèse Patrick Mora, et Viviane Chaudon.

C'est à mes parents et à mon oncle Khadim que reviennent mes ultimes remerciements, pour l'aide immense qu'ils m'ont apportée ces dernières années.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte . . . . .	1
1.2	Objectifs de la thèse . . . . .	4
1.3	Plan de la thèse . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Accélération d'ions par laser et Applications</b>	<b>5</b>
2.1	Théorie de l'accélération . . . . .	5
2.1.1	Introduction . . . . .	5
2.1.2	Target normal sheath acceleration (TNSA) . . . . .	6
2.1.3	Radiation Pressure Acceleration (RPA) . . . . .	8
2.2	Applications des faisceaux d'ions . . . . .	9
2.2.1	Fusion thermonucléaire . . . . .	9
2.2.2	Proton-thérapie . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Généralités sur les plasmas</b>	<b>14</b>
3.1	Plasma . . . . .	14
3.2	Description cinétique . . . . .	14
3.3	Description fluide . . . . .	16
3.4	Conclusion . . . . .	17

<b>I</b>	<b>Étude fluide de l'expansion d'un plasma bi-Maxwellien</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Expansion d'un plasma semi-infini</b>	<b>19</b>
4.1	Modèle de plasma . . . . .	19
4.1.1	Équations générales . . . . .	19
4.1.2	Expansion quasi-neutre : solution auto-semblable . . . . .	20
4.1.3	Impossibilité d'une solution auto-semblable . . . . .	26
4.2	Caractéristiques de la discontinuité . . . . .	27
4.2.1	Relations de Rankine-Hugoniot . . . . .	27
4.2.2	Conditions d'existence de la discontinuité . . . . .	29
4.3	Conclusion . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Caractéristiques microscopiques du choc de raréfaction</b>	<b>34</b>
5.1	Choc de raréfaction : conditions nécessaires d'existence . . . . .	34
5.2	Résolution de l'Hugoniot du choc . . . . .	38
5.3	Étude des différents régimes d'expansion . . . . .	42
5.3.1	Régime d'expansion standard . . . . .	42
5.3.2	Régime d'expansion supersonique . . . . .	52
5.3.3	Régime d'expansion : raréfaction des électrons chauds . . . . .	58
5.4	Conclusion . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Comparaisons avec les simulations</b>	<b>60</b>
6.1	Description du code . . . . .	60
6.2	Résultats des simulations . . . . .	63
6.2.1	Profils spatiaux . . . . .	63
6.2.2	Vitesse du front de raréfaction . . . . .	65
6.2.3	Spectre des ions . . . . .	66
6.3	Conclusion . . . . .	67



<b>II Étude cinétique</b>	<b>68</b>
<b>7 Étude cinétique de l’expansion d’un plasma bi-Maxwellien</b>	<b>69</b>
7.1 Présentation du code . . . . .	69
7.1.1 Conditions initiales . . . . .	71
7.1.2 Aspects énergétiques . . . . .	73
7.2 Régimes d’expansion et aspects énergétiques . . . . .	74
7.2.1 Régime de raréfaction des électrons chauds . . . . .	74
7.2.2 Régime d’expansion supersonique . . . . .	82
7.2.3 Régime d’expansion standard . . . . .	84
7.2.4 Accélération des ions . . . . .	89
7.3 Conclusion . . . . .	91
<b>8 Conclusion générale</b>	<b>92</b>
<b>A Annexe</b>	<b>95</b>
A.1 Modèle physique . . . . .	95
A.2 Choc de raréfaction . . . . .	96
<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# Table des figures

2.1	<i>Schéma de l'accélération des ions par interaction laser-matière grâce au mécanisme du Target Normal Sheath Acceleration (TNSA). Cette figure est adaptée de la Ref. [38]. . . . .</i>	7
2.2	<i>Schéma de principe du RPA. Densité des ions et des électrons (a) à l'instant initial <math>t = 0</math> (b) à un instant <math>t</math> après l'arrivée de l'impulsion laser. Cette structure en double couche est maintenue par la pression de rayonnement du laser. . . . .</i>	7
2.3	<i>(a) schéma de l'attaque directe pour la fusion par confinement inertiel (b) schéma de l'attaque indirecte, les rayons bleus représentent les impulsions lasers venant irradier le matériau à haut <math>Z</math> contenu dans les parois du Hohlraum. . . . .</i>	11
2.4	<i>Différentes étapes pour l'allumage rapide avec des d'électrons : (a) compression (b) creusement du canal (c) dépôt d'électrons énergétiques (d) ignition. . . . .</i>	11
2.5	<i>Schéma de l'allumage rapide par guidage cône avec des protons. La cible pour produire les ions (par TNSA ou RPA) est la courbure noire. . . . .</i>	11
2.6	<i>Exemple de mesure de profil dose-profondeur d'un faisceau de <math>^{12}\text{C}</math> à travers l'eau. Cette figure est adaptée de la Ref. [53]. . . . .</i>	13
4.1	<i>Profils spatiaux en fonction de <math>\xi</math> au temps <math>\omega_{pi}t = 50</math> (a) de la densité des électrons et des ions (b), du champ électrique. (c) vitesse du front d'ions en fonction du temps. (d) spectre des ions au temps <math>\omega_{pi}t = 50</math>. Les pointillés sur (a) et (b) représentent la solution quasi-neutre. Le champ électrique est normalisé à <math>E_0 = (n_u k_B T_e / \epsilon_0)^{1/2}</math>. . . . .</i>	23
4.2	<i>Profils spatiaux de la vitesse (a) et de la densité (b) des ions en fonction de <math>\xi</math> pour <math>\alpha = 8</math> et <math>y_u = 10^{-1}</math>, tirée de l'intégration de la formule (4.19). . .</i>	25
4.3	<i>Profil spatial de la vitesse des ions pour <math>\alpha = 20</math> et <math>y_u = 10^{-1}</math>, tirée de l'intégration de la formule (4.19). . . . .</i>	25

4.4	<i>Ce schéma illustre la structure de l'écoulement avec la présence d'une discontinuité séparant l'expansion lente à l'expansion rapide. 1- Le plasma non-perturbé, 2- L'expansion lente, 3- La discontinuité, 4- L'expansion rapide. . . . .</i>	26
4.5	<i>Les différentes configurations possibles pour la structure de l'écoulement lors de l'occurrence d'un choc de raréfaction dans le plasma. (a) <math>u_0 = c_{s0}</math>, <math>u_1 &gt; c_{s1}</math>; (b) <math>u_0 &gt; c_{s0}</math>, <math>u_1 &gt; c_{s1}</math>; (c) <math>u_0 = c_{s0}</math>, <math>u_1 = c_{s1}</math>; (d) <math>u_0 &gt; c_{s0}</math>, <math>u_1 = c_{s1}</math>. . . . .</i>	31
4.6	<i>Isentrope d'un gaz de Van der Waals. Le domaine hachuré correspond à la région de transition de phases (liquide-vapeur). La courbe II entoure la région où l'isentrope est concave localement (<math>\partial P^2 / \partial V^2 &lt; 0</math>). Cette figure est adaptée de la Ref. [35]. . . . .</i>	33
5.1	<i>Courbe du rapport en densité du plasma <math>y(\phi)</math> en fonction de <math>\alpha</math>. La région entourée par l'hyperbole (<math>&lt; 0</math>) correspond aux solutions de l'équation (5.6). . . . .</i>	37
5.2	<i>Profil spatial du potentiel électrique du plasma en fonction de la variable auto-semblable <math>\xi</math> calculé avec la formule (4.19). . . . .</i>	37
5.3	<i>Méthode de construction de la structure de l'écoulement du plasma. . . . .</i>	41
5.4	<i>Potentiel électrique en fonction de <math>\xi</math> pour <math>\alpha = 10^2</math> et <math>y_u = 10^{-2}</math>. La courbe en pointillés est la solution obtenue en intégrant l'équation (4.19). La courbe en trait plein est la solution physique calculée avec (5.13). . . . .</i>	43
5.5	<i>Similaire à la figure 5.4 pour les paramètres plasma suivants : <math>\alpha = 20</math> et <math>y_u = 10^{-2}</math>. . . . .</i>	43
5.6	<i>Profiles spatiaux de la vitesse (a) et de la densité (b) des ions pour des paramètres plasma identiques à ceux de la figure 5.4. . . . .</i>	44
5.7	<i>Vitesse de l'écoulement des ions en fonction du rapport en densité des électrons en amont du choc <math>y_0</math> pour <math>\alpha = 10^2</math>. Le trait et les pontillés-tirés bleus représentent la vitesse du son en amont <math>c_{s0}</math> et en aval <math>c_{s1}</math> du choc. Les lignes continues noires sont les vitesses de l'écoulement amont <math>u_0</math> et aval <math>u_1</math> du choc. Les trait-tirets rouges correspondent aux valeurs de <math>u_0</math> pour lesquelles la contrainte (4.47) n'est pas satisfaite. . . . .</i>	46
5.8	<i>Pression des électrons en fonction des volumes spécifiques des électrons <math>V_e = 1/n_e</math> (points-tirets rouges) et des ions <math>V = 1/n</math> (ligne continue), pour <math>\alpha = 10^2</math>. Les points A-F identifiés sur la figure 5.4(a) y sont également représentés. La ligne droite (en tirets) reliant B et E se rapporte à l'équation (5.23). Les volumes spécifiques <math>V_e</math> et <math>V</math>, et la pression <math>P</math> sont normalisés à leurs valeurs respectives au point amont du choc (i.e., <math>P_B</math> et <math>V_B</math>). . . . .</i>	46

5.9	<i>Profils spatiaux (a) du potentiel, (b) du champ électrique, (c) de la densité des ions et des électrons, des vitesses du son <math>c_{si}</math> (en tirets) et <math>c_s</math> (en points-tirets), de la vitesse de l'écoulement en aval du choc <math>u</math> (ligne continue), à l'intérieur de l'onde de raréfaction en fonction de <math>X</math> pour <math>\alpha = 10^2</math>. Le champ électrique est normalisée à <math>E_0 = (n_{h0}k_B T_h / \epsilon_0)^{1/2}</math>. La variable spatiale <math>X \simeq x - \xi_s t</math> est normalisée à <math>\lambda_{Dh0} = (\epsilon_0 k_B T_h / n_{h0} e^2)^{1/2}</math>. La position <math>X = 0</math> correspond au maximum du champ électrique. . . . .</i>	48
5.10	<i>Profil spatial du potentiel électrique pour <math>y_u = y_B \simeq 0.28</math> (la valeur de transition pour <math>\alpha = 10^2</math>). Ligne continue représente le résultat de la formule (4.19). . . . .</i>	53
5.11	<i>Similaire à la figure 5.10 pour <math>y_u = 10</math> et <math>\alpha = 10^2</math>. . . . .</i>	53
5.12	<i>Similaire à la figure 5.7. Les points A, B', D, E et F sont ceux de la figure 5.11. . . . .</i>	55
5.13	<i>Similaire à la figure 5.7. Les points A, B', D, E et F sont ceux de la figure 5.11. . . . .</i>	55
5.14	<i>Nombre de Mac en amont du choc <math>u_0/c_s</math> en fonction de <math>y_u</math> pour <math>\alpha = 10^2</math>. Le courbe bleue correspond à la solution approximative obtenue avec les équations (5.53)-(5.55). . . . .</i>	57
5.15	<i>Variation de la position du choc en fonction de <math>y_u</math> dans le plan <math>(\phi, \xi)</math>, pour <math>\alpha = 10^2</math>. Les barres représentent l'amplitude du choc, et les points noirs correspondent aux positions amont et aval du choc de raréfaction. Les valeurs du rapport en densité sont (de gauche à la droite) : <math>y_u = y_D \simeq 4700, 10^2, 10, 5, y_C \simeq 2.13, 1, y_B \simeq 0.28, 0.11, 10^{-2}, 10^{-3}</math>. . . . .</i>	57
5.16	<i>Profil spatial du potentiel électrique calculé avec la formule (4.19), pour <math>y_u = y_D \simeq 4700</math> (valeur pour laquelle le choc de raréfaction disparaît du plasma pour <math>\alpha = 10^2</math>). . . . .</i>	59
6.1	<i>Schémas du maillage (a) spatial et (b) temporel du type saute-mouton. . .</i>	61
6.2	<i>Profil spatial du potentiel électrique du plasma pour <math>\alpha = 10^2</math> et <math>y_u = 10^{-2}</math>. En tirets-points : résultats des simulations aux temps <math>\omega_{pih} t = 20, 100</math>, et 500. En trait continu : la solution physique de l'expansion. En tirets : le résultat du modèle d'expansion quasi-neutre (4.19). . . . .</i>	63
6.3	<i>Profil spatial du champ électrique au temps <math>\omega_{pih} t = 20</math>, pour les paramètres plasma suivant : <math>\alpha = 10^2</math> et <math>y_u = 10^{-2}</math>. Le champ électrique au niveau de l'encart (un zoom sur le pic du choc de raréfaction) est normalisé à <math>E_0 = (n_{h0}/n_{hu})^{1/2} E_u</math>. . . . .</i>	64
6.4	<i>Vitesse du front d'ions en fonction du temps pour : <math>\alpha y_u = 10^{-1}, \alpha y_u = 1</math> et <math>\alpha y_u = 10</math>. La courbe en pontillés correspond au cas <math>y_u = \infty</math>. . . . .</i>	65

6.5	<i>Spectre en vitesse des ions à différents instants pour un rapport en densité dans le plasma initial <math>y_u = 10^{-2}</math> et <math>\alpha = 10^2</math>. Les points A, B, C, D, E et F correspondent aux différentes positions de l'écoulement identifiées sur la figure 6.2. . . . .</i>	66
7.1	<i>Discrétisation d'une fonction de distribution au centre de la cible. La courbe noire correspond à la distribution initiale, alors que la courbe rouge représente la fonction de distribution reconstruite à l'instant <math>t</math>. Cette figure est adaptée de la Ref. [13]. . . . .</i>	72
7.2	<i>Exemple de fonction de distribution initiale des électrons au centre du plasma pour les paramètres suivants : <math>n_{cu} = n_{hu} = n_u/2</math> et <math>T_{h0}/T_{c0} = 20</math> à <math>t = 0</math>. Chaque espèce d'électrons a une distribution en vitesse initiale Maxwellienne. . . . .</i>	72
7.3	<i>Variation de la température des électrons froids en fonction du temps. Les paramètres initiaux du plasma sont <math>y_u = 10^4</math>, <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>, et <math>\alpha = 10-10^3</math>. . . . .</i>	75
7.4	<i>Variation de la température des électrons froids et des électrons chauds en fonction du temps pour <math>y_u = 10^4</math>, <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>, et <math>\alpha = 10^2</math>. . . . .</i>	75
7.5	<i>Variation de la température des électrons froids en fonction du temps pour des plasmas de différentes longueurs initiales : <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20, 100</math>, et <math>500</math>. Les paramètres initiaux du plasma sont <math>y_u = 10^4</math> et <math>\alpha = 10^2</math>. . . . .</i>	76
7.6	<i>Température des électrons en fonction du temps. On a représenté ici les résultats des simulations pour un plasma de taille initiale <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math> (courbes marrons) et <math>L/2\lambda_{Dh0} = 100</math> (courbes noires). La courbe en tirets rouges correspond à la formule (7.35), alors que la courbe bleue représente la formule (7.38). Les paramètres initiaux sont <math>y_u = 10^4</math> et <math>\alpha = 10^2</math>. . . . .</i>	80
7.7	<i>Gain maximal en température des électrons froids en fonction de <math>\alpha</math> pour des plasmas de différentes tailles initiales <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math> (cercles), <math>L/2\lambda_{Dh0} = 100</math> (points) et <math>L/2\lambda_{Dh0} = 500</math> (croix) et pour <math>y_u = 10^4</math>. Les carrés représentent le résultat de la formule (7.42). . . . .</i>	80
7.8	<i>Températures des électrons froids obtenues avec le modèle cinétique (ligne continue) et le modèle hybride (tirets) pour les paramètres suivants <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>, <math>\alpha = 10^2</math> et <math>y_u = 10^4</math>. . . . .</i>	82
7.9	<i>Variation de la température des électrons froids en fonction du temps pour <math>y_u = 10^2</math>, <math>y_u = 10^0</math> et <math>y_u = 8 \times 10^{-2}</math>. Les paramètres initiaux du plasma sont : <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math> et <math>\alpha = 10^2</math>. . . . .</i>	83
7.10	<i>Température des électrons froids et des électrons chauds en fonction du temps pour les paramètres plasma suivants : <math>y_u = 10^{-2}</math>, <math>\alpha = 10^2</math> et <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>. . . . .</i>	83

7.11	<i>Fonction de distribution en vitesses des électrons normalisée à <math>f_{h0}</math> prise au centre de la cible à différents instants. Les paramètres plasma sont identiques à ceux la figure 7.10.</i>	85
7.12	<i>Vitesse du son au centre de la cible en fonction du temps. Les paramètres plasma sont ceux de la figure 7.11.</i>	85
7.13	<i>Profils du potentiel électrostatique en fonction de <math>\xi</math>, aux temps (a) <math>t = 10^{-1} \tau</math>, (b) <math>t = 0.5 \tau</math>, (c) <math>t = 2.5 \tau</math>, et (d) <math>t = 12.5 \tau</math>. Les paramètres initiaux sont : <math>\alpha = 10^2</math>, <math>y_u = 10^{-2}</math>, et <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>.</i>	87
7.14	<i>Profils du champ électrique en fonction de <math>\xi</math> aux temps (a) <math>t = 10^{-1} \tau</math> (b) <math>t = 0.5 \tau</math> (c) <math>t = 2.5 \tau</math> et (d) <math>t = 12.5 \tau</math>. Les paramètres du plasma sont : <math>\alpha = 10^2</math>, <math>y_u = 10^{-2}</math> et <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>.</i>	88
7.15	<i>Vitesse du front d'ions en fonction du temps pour <math>y_u = 10^{-2}</math>, <math>\alpha = 10^2</math> et <math>L/2\lambda_{Dh0} = 20</math>. Courbe noire : code cinétique ; courbe bleue : code hybride ; courbe en tirets : code cinétique pour un plasma avec une seule espèce d'électrons.</i>	90
7.16	<i>Spectre en vitesse des ions à <math>t = 0.5 \tau</math>, <math>2.5 \tau</math> et <math>100 \tau</math>. Les paramètres plasma sont ceux de la figure 7.12.</i>	90
A.1	<i>Structure de l'écoulement du plasma. La flèche indique le sens de l'écoulement.</i>	97

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

Des progrès technologiques importants ont été réalisés ces dernières années dans la quête d'impulsions lasers intenses (forte irradiation  $I\lambda_L^2 \geq 10^{18} W cm^{-2} \mu m^2$  où  $I$  est l'intensité du laser et  $\lambda_L$  sa longueur d'onde), et de courtes durées ( $\tau_L \simeq 10^{-15} s$ ) permettant ainsi la génération d'électrons de haute énergie. En effet, la physique de l'interaction d'une impulsion laser ultra-intense avec la matière crée un plasma très chaud dans lequel différents phénomènes non-linéaires se produisent sur des temps caractéristiques très courts. Ces processus se traduisent par une génération d'électrons rapides (potentiellement relativistes). En général, le spectre des électrons accélérés consiste en une composante très énergétique d'électrons de densité faible, mais également en une composante d'électrons de basse énergie avec une densité plus importante, les deux coexistant simultanément dans le plasma [1].

Lors des expériences avec des cibles minces, les électrons rapides peuvent accélérer les ions à de hautes énergies induisant une expansion de la cible. Il existe essentiellement deux mécanismes physique pour la génération par laser de faisceaux d'ions en face arrière (et en face avant) d'une cible mince : le TNSA (target-normal sheath acceleration) et le RPA (radiation-pressure acceleration). Un nombre important d'applications de ces faisceaux d'ions générés lors de l'interaction d'impulsions laser intenses avec des cibles minces ont été proposées dans le but d'utiliser leurs propriétés de faisceaux remarquables. Ces applications couvrent un large spectre allant de la médecine à la fusion thermonucléaire en passant par la génération d'isotopes.

L'étude de la physique de l'accélération des ions est fortement liée aux mécanismes d'expansion d'un plasma dans un vide, tant l'accélération efficace des ions se fait à l'interface plasma-vide dans la plupart des schémas étudiés. Une présentation, non exhaustive, des résultats les plus importants obtenus ces dernières années sur l'étude de l'expansion de plasma dans un vide nous semble pertinente à ce moment de la thèse.

## Plasma avec une population d'électrons et une espèce d'ions

Gurevich *et al.* [3] ont été les premiers à étudier le problème de l'expansion d'un plasma dans un vide, en s'appuyant sur un modèle quasi-neutre et isotherme, avec une distribution de Boltzmann pour la densité des électrons. Ce modèle donne les solutions auto-semblables de l'expansion et suggère une vitesse des ions qui croît infiniment dans l'espace.

Il convient de préciser que même si ce modèle offre une meilleure compréhension de certains résultats expérimentaux, il ne permet pas d'étudier l'échange d'énergie entre les électrons et les ions au travers du champ électrique et les distorsions qui peuvent en résulter sur la distribution en densité des électrons comme le montrent Allen & Andrews [4]. En outre, Crow *et al* [5] ont démontré que les effets de séparation de charges limitent la vitesse maximale des ions en formant une couche électrostatique non neutre qui tronque le profil exponentiel de la densité des ions à un point proche de la position où la longueur caractéristique de la densité des ions est égale la longueur de Debye locale. Plus tard Pearlman & Morse [6], tenant compte de ces effets de séparation de charges, ont corrigé ce modèle en proposant une expression approximative de la vitesse maximale des ions sous la forme :  $v_{max} \simeq c_s [3 + 2 \ln(2\tau)]$  où  $\tau = \omega_{pi} t / \sqrt{2e_N}$ <sup>1</sup>,  $\omega_{pi}$ <sup>2</sup> la fréquence plasma ionique et  $c_s$  la vitesse du son. Une étude très précise des effets dus à la séparation de charges lors de l'expansion du plasma dans le vide a été menée par Mora [7]. Celle-ci a permis d'établir les expressions exactes de la position de la structure du front d'ions, du spectre des ions, et plus spécifiquement de la vitesse maximale des ions,  $v_{max} = 2c_s \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 + 1})$ .

Les études citées ci-dessus considèrent un plasma semi-infini dans lequel l'énergie et le nombre total de particules sont infinis. Pour des plasmas de tailles finies, contrairement au cas d'un plasma semi-infini, on ne peut pas considérer le plasma comme une source infinie de particules et d'énergie. L'énergie des électrons évolue dans le temps, en effet les électrons transfèrent globalement leur énergie aux ions au cours de l'expansion (True *et al.* [10] et Mora [12]). Pour une cible de taille finie, Mora [12] a estimé que la vitesse maximale des ions dépend uniquement des paramètres initiaux du plasmas, et elle s'écrit sous la forme :  $v_{max} \simeq c_s \ln(0.32 L / \lambda_{D,0} + 4.2)$  où  $L$  est la taille initiale du plasma et  $\lambda_{D,0}$  la longueur de Debye initiale des électrons, les valeurs numériques étant déterminées grâce à des simulations. Par ailleurs, des études réalisées avec un modèle d'expansion cinétique [13, 14] ont démontré que les effets cinétiques induisent de fortes distorsions sur la fonction de distribution des électrons initialement Maxwellienne, puis une accélération de l'onde de raréfaction jusqu'au centre de la feuille de plasma.

## Plasma avec deux populations d'électrons et une espèce d'ions

Une expérience réalisée avec une intensité laser modeste  $I \simeq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  fait état de la génération de deux populations d'électrons avec des températures  $T_c = 20 \text{ keV}$  et  $T_h = 120$

---

1.  $e_N$  désigne le logarithme népérien.

2. Par abus de langage, on appelle fréquence plasma la grandeur  $\omega_{pi}$ , bien que celle-ci ne soit pas homogène avec une fréquence. C'est en réalité une pulsation.



$keV$  [1]. Pour ces régimes d'intensités, Forslund *et al.* [18] ont établi numériquement une expression de la température des électrons chauds  $T_h$  d'un plasma en fonction de l'intensité laser et de la température des électrons froids  $T_c$  sous la forme  $T_h \simeq 14(I_{16}\lambda_L^2)^{1/3}T_c^{1/3}$ . De même le rapport de la densité des électrons chauds à la densité des électrons froids peut s'écrire de manière suivante :  $n_h/n_c \simeq 2\eta(I_{16}\lambda_L^2)^{1/2}/T_c^{1/2}$  où  $\eta$  est la fraction du flux incident absorbé. Par ailleurs, Hansen *et al.* [16], avec une cible d'aluminium recouverte de Titane (Ti) et irradiée par une impulsion laser d'intensité  $10^{19} \text{ Wcm}^{-2}$  ( $500 \text{ fs}$   $3\text{-}6 \text{ J}$ ), ont mesuré une température pour les électrons froids de l'ordre de  $40 \text{ eV}$ . En outre Evans *et al.* [15] ont obtenu une température pour les électrons froids de l'ordre de  $500 \text{ eV}$  avec le laser Vulcan ( $300 \text{ J}$  d'énergie, une durée d'impulsion de  $800 \text{ fs}$ , et une intensité laser  $I \sim 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$ ) focalisée sur une cible d'aluminium entourée d'une couche de plastique  $CH$ . La température des électrons rapides (responsables du chauffage) créés avec cette impulsion laser est de l'ordre du  $MeV$ .

Sur le plan théorique, plusieurs résultats ont été publiés. D'une part, Morse & Nielson [19] ont regardé la structure de la discontinuité de l'écoulement résultant d'un plasma à deux températures d'électrons. Leur modèle fournit certains éléments caractéristiques de l'écoulement (amplitude du saut du choc, vitesses et densités en amont et en aval de la discontinuité, etc.), dans la limite où la pression des électrons froids est négligeable devant celle des électrons chauds. Plus tard, Wickens *et al.* [20] ont évoqué la première fois la possibilité d'une rupture de validité de l'hypothèse de quasi-neutralité du plasma, lorsque le rapport en température entre les électrons chauds et froids est supérieure ou égal à  $5 + \sqrt{24}$ . Par la suite, Bezzerides *et al.* [21] ont démontré théoriquement l'existence d'un choc de raréfaction dans de telles conditions, dont l'amplitude dépend du rapport en température des électrons chauds à la température des électrons froids. D'autre part, Passoni *et al.* [22] puis Bychenkov *et al.* [23], ont montré que la présence des électrons froids simultanément avec les électrons chauds pouvait augmenter, dans le cas où leur pression est supérieure à celle des électrons chauds, le champ électrique accélérateur et par conséquent l'énergie maximale des ions.

Enfin, des travaux théoriques consacrés à l'expansion de plasma dans un vide avec deux températures d'électrons et deux espèces ioniques (Bochkarev [25], Tikhonchuk [26]), montrent la présence de plusieurs chocs dans le plasma : le choc de raréfaction évoqué ci-dessus et une discontinuité due à la séparation entre les différentes espèces d'ions au cours de l'expansion.

Une meilleure compréhension des mécanismes d'expansion, de la structure du plasma et de l'influence des électrons de basse énergie sur la dynamique du plasma, est nécessaire pour pouvoir évaluer avec certitude les caractéristiques des ions. Ce constat est en effet à l'origine de ce thèse.

## 1.2 Objectifs de la thèse

Ce travail est une étude théorique, numérique et analytique, de l'expansion unidimensionnelle d'un plasma avec une population d'électrons dont la fonction de distribution en vitesse est initialement bi-Maxwellienne. Les effets de la présence simultanée des électrons de basse énergie et des électrons de haute énergie sur la structure de l'expansion mais également sur l'accélération des ions sont abordés. Cette thèse est scindée en deux parties. Dans la première partie, nous considérons un plasma semi-infini dans lequel les électrons et ions sont décrits par un modèle fluide, dans la seconde partie nous examinons les effets du caractère cinétique des électrons et de l'évolution temporelle de leurs fonctions de distribution sur l'expansion, avec un code cinétique.

## 1.3 Plan de la thèse

La partie introductive de ce travail fait un état de l'art des mécanismes d'accélération des ions, puis recense un certain nombre d'applications possibles pour les faisceaux d'ions. Cette partie contient également une description très succincte de l'état plasma et les caractéristiques des modèles fluide et cinétique.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du choc de raréfaction qui apparaît dans un plasma bi-Maxwellien lorsque le rapport en température entre les électrons chauds et froids est supérieur à  $5 + \sqrt{24}$ . Les équations exactes et les expressions asymptotiques des grandeurs caractérisant la structure de l'expansion du plasma et en particulier le choc de raréfaction sont établies en fonction des paramètres initiaux du plasma (température, densité). Les effets sur l'accélération des ions, de l'existence d'électrons froids dans le plasma sont étudiés. Ces résultats sont confrontés à des simulations effectuées avec un code fluide 1-D et non-collisionnel.

La seconde partie est consacrée au transfert d'énergie entre les électrons froids, les électrons chauds et les ions lors de l'expansion d'une feuille mince. L'étude est faite avec un code cinétique 1-D afin de tenir compte des distorsions de la fonction de distribution des électrons. Le comportement de la structure du choc de raréfaction et la variation de l'énergie des électrons sont précisés pour les différents régimes d'écoulement. Il est démontré que si le plasma est initialement dominé par les électrons chauds, la température des électrons froids subit une importante amplification au cours de la première phase de l'expansion. Des calculs simples effectués avec le potentiel électrostatique du modèle auto-semblable ont permis d'établir une expression de la température des électrons froids. En revanche, si la proportion des électrons chauds dans le plasma est initialement faible, on assiste à un refroidissement global des électrons en faveur des ions. Les conséquences sur la structure du plasma et sur l'accélération des ions sont élucidées.

# Chapitre 2

## Accélération d'ions par laser et Applications

### 2.1 Théorie de l'accélération

#### 2.1.1 Introduction

Avant de discuter les mécanismes de l'accélération des ions, nous allons d'abord faire un rappel non exhaustif des processus de génération des électrons lors de l'interaction laser cible. Ce détour s'explique en partie par le fait que les ions sont, en général, accélérés de façon indirecte par les électrons chauds.

Le transfert de l'énergie de l'impulsion laser aux électrons peut se faire par l'intermédiaire de deux mécanismes : l'absorption collisionnelle ou l'absorption non-collisionnelle. L'absorption collisionnelle (*Bremsstrahlung* inverse) [27] est importante pour des intensités laser  $I \leq 10^{14} \text{ W cm}^{-2}$ , elle se fait via les collisions avec les ions. Pour des intensités  $I \geq 10^{15} \text{ W cm}^{-2}$ , l'absorption non-collisionnelle est le processus de chauffage dominant pour les électrons. Dans ce régime la longueur du gradient de densité du plasma  $L$  joue un rôle important sur l'énergie des électrons. Pour  $L > \lambda_L$ , où  $\lambda_L$  est la longueur d'onde du laser, l'absorption résonante, pour laquelle le champ électrique créé par une impulsion laser en incidence oblique et p-polarisée excite de façon résonante une onde plasma, est responsable du chauffage des électrons. Une relation entre la température des électrons et l'intensité lumineuse est donnée par  $T_h^B [\text{keV}] \simeq 215(I_{18}\lambda_{\mu m}^2)^{1/3}$  [29]. Ensuite pour  $L < \lambda_L$ , il n'y a plus de résonance, nous assistons à un chauffage Brunel [28]. Celui-ci se caractérise par une première phase où les électrons sont expulsés du plasma vers le vide au delà de la longueur de Debye thermique par la composante normale du champ du laser, puis ré-injectés à nouveau dans le plasma lorsque le champ change de sens. Pour ce régime le laser doit être en incidence oblique avec la cible en formant un angle  $\theta$  avec la direction normale à cette dernière. Les études numériques réalisées montrent une absorption très

importante de l'énergie laser, pouvant aller jusqu'à 70 % du flux incident, pour un angle d'incidence  $\theta \simeq 73^\circ$  [27]. Enfin, il existe un mécanisme de chauffage des électrons rapides par la composante magnétique de la force pondéromotrice, le chauffage  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  [30]. En effet dans le domaine relativiste l'accélération des électrons se fait principalement par la force pondéromotrice. Une expression de la température des électrons rapides, dans ce régime, est donnée par la formule de Wilks,  $T_h^W [keV] \simeq 511 [(1 + 0.73 I_{18} \lambda_{\mu m}^2)^{1/2} - 1]$ .

## 2.1.2 Target normal sheath acceleration (TNSA)

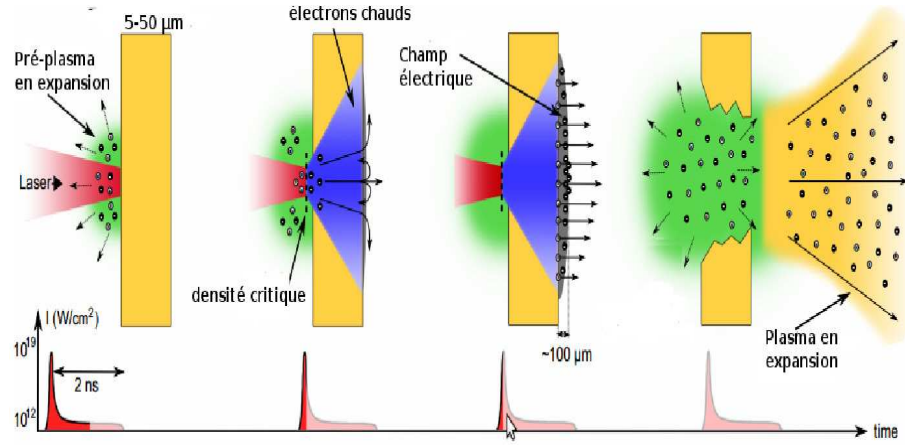
L'incidence d'une impulsion laser ultra-intense sur une cible solide (ou gazeuse) permet d'accélérer un large nombre d'électrons à des énergies de l'ordre de quelques  $MeV$  [31]. Lors des expériences avec des cibles minces, les électrons chauds traversent la cible, et viennent former en face arrière de celle-ci un nuage d'électrons chauds. Ensuite, sous l'effet de la séparation de charges, un champ électrique intense de l'ordre du  $TVm^{-1}$  se crée. Ce champ ionise les molécules de la face arrière de la cible, puis accélère les ions jusqu'à des énergies très importantes [32, 33, 36], (les différentes étapes de ce processus sont illustrées sur la figure 2.1). Ce mécanisme d'accélération est appelé *Target Normal Sheath Acceleration* (TNSA), et a été confirmé par plusieurs expériences. Des ions de 58 MeV d'énergie ont été obtenus avec ce mécanisme par Snavely *et al.* [37].

Les ions créés en face arrière de la cible présentent des caractéristiques de faisceaux uniques (courte durée, haute énergie, faible émittance, etc.) qui font d'eux des candidats idéaux pour plusieurs applications. Toutefois, l'utilisation des faisceaux d'ions créés avec ce mécanisme d'accélération (TNSA), présente quelques inconvénients : le caractère quasi-Maxwellien du spectre des ions conduit à une forte dispersion de l'énergie des ions ce qui est problématique pour les applications [39], ensuite la divergence latérale du faisceau d'ions mène à un élargissement et à une diminution de la couche accélératrice d'ions.

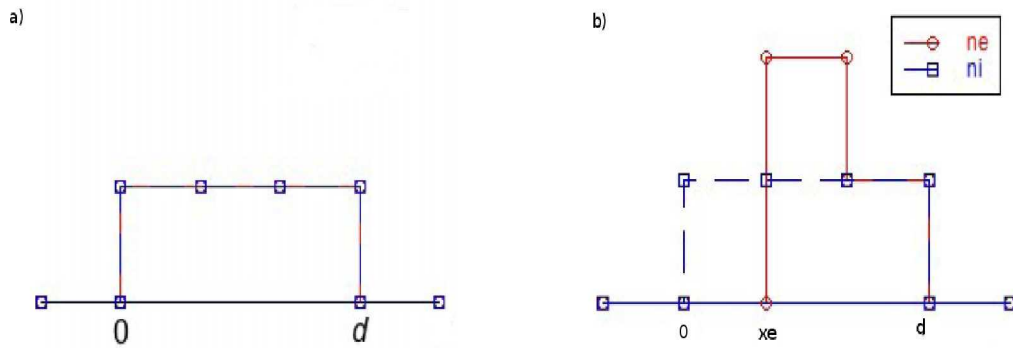
Par ailleurs en fonction de la géométrie de la cible, l'énergie des ions peut être augmentée grâce à la re-circulation des électrons confinés dans un volume très faible de la cible [41, 42]. En outre plusieurs auteurs ont réussi à obtenir des faisceaux d'ions mono-énergétiques avec notamment la présence d'un pic au niveau du spectre des ions, Schollmeier *et al.* [44] puis Toncian *et al.* [45] en utilisant une technique de sélection spectrale avec une micro-lentille externe. Grâce à une technique de rotation radio-fréquence en phase, Noda *et al.* [46] ont obtenu le même résultat. Elle consiste à tourner la phase longitudinale du faisceau de protons avec un champ électrique d'une radio-fréquence (RF) dont la phase est bien ajustée avec celle du laser. Le but est d'accélérer les protons de faible énergie et en même temps de ralentir ceux de haute énergie de façon à avoir un faisceau homogène à la sortie de la cavité radiofréquence.

Pour finir, notons que la présence de chocs non-collisionnels dans les plasmas permet non seulement une accélération efficace des ions, mais également d'éliminer la structure en exponentielle décroissante avec l'énergie du spectre des ions, en faisant apparaître un pic

sur le spectre des ions (les détails de l'expérience réalisée avec un laser  $CO_2$  sont donnés dans ce papier Réf. [47]).



**FIGURE 2.1** – Schéma de l'accélération des ions par interaction laser-matière grâce au mécanisme du Target Normal Sheath Acceleration (TNSA). Cette figure est adaptée de la Ref. [38].



**FIGURE 2.2** – Schéma de principe du RPA. Densité des ions et des électrons (a) à l'instant initial  $t = 0$  (b) à un instant  $t$  après l'arrivée de l'impulsion laser. Cette structure en double couche est maintenue par la pression de rayonnement du laser.

### 2.1.3 Radiation Pressure Acceleration (RPA)

Du fait des nombreuses contraintes qui pèsent sur le TNSA, notamment le spectre quasi-Maxwellien des ions, la forte dépendance en fonction des électrons rapides, et la variation de l'énergie avec l'irradiance sous la forme  $(I\lambda_L)^{1/2}$ , d'autres mécanismes de génération d'ions ont été explorés, et en particulier la « Radiation Pressure Acceleration » (RPA). Le RPA peut être décrit comme suit : la force pondéromotrice du laser accélère rapidement les électrons (créant une couche d'électrons très dense), les ions du fait de leur forte inertie restent immobiles en arrière. En conséquence, une zone de déplétion en électrons se forme (voir Figure 2.2). Ensuite l'équilibre entre la force de pression des photons et la force électrostatique créée par la séparation de charges permet d'accélérer les électrons et les ions comme un seul bloc au cours de la propagation de l'impulsion laser au travers de la cible.

Pour estimer l'énergie des ions, supposons d'abord que la cible de densité ionique  $n_i$ , d'épaisseur  $d$  et de masse  $m_i$  est uniformément accélérée par la pression de rayonnement du laser, celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$P = (1 + R) \frac{I}{c}$$

où  $I$  est l'intensité du laser,  $c$  la vitesse de la lumière et  $R$  la réflectivité. La condition d'équilibre entre la force électrostatique et la force de rayonnement est satisfaite pour

$$P = (1 + R) \frac{I}{c} \simeq m_i n_i d \frac{v_i}{t}$$

soit une énergie des ions

$$\mathcal{E}(t) = \frac{2I^2 t^2}{\rho c^2}$$

où nous avons pris  $R = 1$  et  $\rho = m_i n_i d$ . Il convient ici de noter que l'énergie des ions pour le RPA varie en  $I^2$  alors que pour le TNSA elle évolue en  $I^{1/2}$ . Cependant, ce mécanisme dépend fortement de la densité surfacique de la cible  $\rho$  et de la durée de l'impulsion laser.

Esirkepov *et al.* [2] ont démontré numériquement la possibilité de générer des ions d'énergies de l'ordre de 30 GeV avec le régime RPA pour des intensités lasers  $I\lambda_L^2 > 10^{24} \text{ W cm}^{-2} \mu\text{m}^2$  et avec une polarisation laser linéaire. Cependant, ces intensités ne sont pas accessibles avec la technologie actuelle des lasers. D'autres études menées par (Macchi *et al.*, [48], puis Robinson *et al.* [49]) ont démontré la possibilité d'accélérer des ions dans le régime du RPA avec les lasers actuels, c'est-à-dire avec des intensités lumineuses modestes, typiquement de l'ordre de  $I \simeq 10^{20} \text{ W cm}^{-2}$ . Mais cela nécessite que certaines conditions soient satisfaites :

1. Une impulsion laser en polarisation circulaire.
2. Un contraste extrêmement haut pour l'utilisation de cibles ultra-minces.
3. Une épaisseur minimum pour la cible est requise, afin d'éviter que les électrons ne soient arrachés de la cible.

L'idée est en effet de changer la dynamique des électrons. Ce qui est effectivement le cas pour une impulsion laser polarisée en circulaire. En effet, à incidence normale l'expulsion périodique à  $2\omega_L$  (avec  $\omega_L$  la fréquence du laser) des électrons relativistes par la force pondéromotrice est supprimée, empêchant la présence de courant d'électrons relativistes à la surface de la cible ce qui réduit nettement le TNSA. Les résultats des simulations numériques montrent des ions avec une très grande énergie, et un spectre en énergie étroit et bien centré à l'énergie maximale. De plus, on observe une faible dispersion en énergie contrairement au TNSA.

Henig *et al.* [50] ont récemment obtenu expérimentalement un faisceau mono-énergétique d'ions  $C^{6+}$  centré à 30 MeV avec une impulsion laser d'énergie 0.7 J et une intensité  $5 \times 10^{19} \text{ W cm}^{-2}$  focalisée sur une cible de carbone amorphe (DLC : Diamond Like Carbon). L'épaisseur de la cible utilisée,  $d = 5.3 \text{ nm}$  correspond à la valeur pour laquelle l'énergie des ions est maximale. Lors de l'expérience, ils ont utilisé deux polarisations du laser ; linéaire puis circulaire. La mesure du spectre des électrons a permis de confirmer la faible production d'électrons de haute énergie dans le cas de la polarisation circulaire. Ce qui laisse penser qu'on est bien en régime RPA. De plus leur contraste laser est extrêmement haut ( $C = 10^{-9}$ ), grâce à l'utilisation de deux miroirs plasmas. D'autres expériences devront venir confirmer la promesse de ce mécanisme.

## 2.2 Applications des faisceaux d'ions

### 2.2.1 Fusion thermonucléaire

Les défis à surmonter pour domestiquer l'énergie de la fusion thermonucléaire constituent un enjeu majeur pour les physiciens. La fusion est actuellement une alternative sérieuse à la fission nucléaire. Elle présente beaucoup d'avantages : très peu de déchets radioactifs, faible émission de gaz à effet de serre. Tous les schémas actuels pour la fusion utilisent du deutérium (D) et du tritium (T) comme combustible du fait d'une plus grande section efficace pour la fusion du D-T sur des températures accessibles (autour de quelques 40 keV) et de la grande quantité d'énergie libérée ( $Q = 3.3 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}$ ),



où  $n$  est le neutron libéré par la réaction. Il existe deux voies pour faire de la fusion sur terre : la fusion par confinement magnétique où des bobines supraconducteurs très puissantes se chargent, à l'intérieur du Tokamak, d'assurer le confinement en équilibrant la pression fluide du plasma (de faible densité  $n_e \simeq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ), et la fusion par confinement inertiel. Pour cette dernière on peut distinguer, l'attaque directe [voir figure 2.3(a)], pour laquelle des impulsions laser viennent comprimer jusqu'à l'allumage une capsule sphérique contenant

le combustible, et l'attaque indirecte [voir figure 2.3(b)], qui consiste à placer cette capsule à l'intérieur d'une enceinte cylindrique appelée *Hohlraum*<sup>1</sup>.

Cette enceinte est recouverte d'un matériau à fort Z (généralement de l'or). Les impulsions lasers arrivant au niveau du *Hohlraum* sont absorbées par l'or, qui ensuite va émettre un rayonnement X capable de comprimer uniformément la cible puis de la porter à l'allumage (c'est l'objectif avec NIF<sup>2</sup>). Il existe des schémas alternatifs, à l'attaque directe et indirecte, consistant essentiellement à remplacer les impulsions lasers par des faisceaux d'ions lourds. Pour l'attaque indirecte avec les ions lourds le *Hohlraum* est remplacé par une couverture qui absorbe l'énergie des ions, et génère en retour des rayons X capables d'assurer l'allumage du combustible (pour plus de détails voir Logan *et al.* [51]).

Les nombreuses difficultés liées aux schémas direct et indirect (distorsions de la capsule par les instabilités de Rayleigh-Taylor modifiant au passage les conditions optimales pour la fusion, chauffage du combustible par les électrons supra-thermiques rendant difficile la compression de la cible, et plus récemment les instabilités de rétro-diffusion), ont ouvert la voie à d'autres schémas pour la fusion. L'allumage rapide est un concept qui a été proposé par Tabak *et al.* [52], comme une alternative aux approches pour la fusion présentées ci-dessus. Elle consiste en une séparation de la phase de compression et de celle d'allumage. D'abord des faisceaux lasers longs (quelques nanosecondes) et de faibles intensités ( $10^{15} \text{ W cm}^{-2}$ ) compriment la capsule contenant le combustible (DT). Ensuite, avec une impulsion laser brève et intense ( $10^{18} \text{ W cm}^{-2}$  -  $100 \text{ ps}$ ) on creuse un canal dans la couronne qui entoure le plasma. Et enfin une impulsion laser plus brève et plus intense ( $10^{20} \text{ W cm}^{-2}$  -  $10 \text{ ps}$ ) se propage au travers du canal et vient déposer son énergie au bout du canal accélérant ainsi les électrons à des énergies capables de déclencher les réactions thermonucléaires au cœur de la cible. Ces différentes étapes sont résumées sur la figure 2.4.

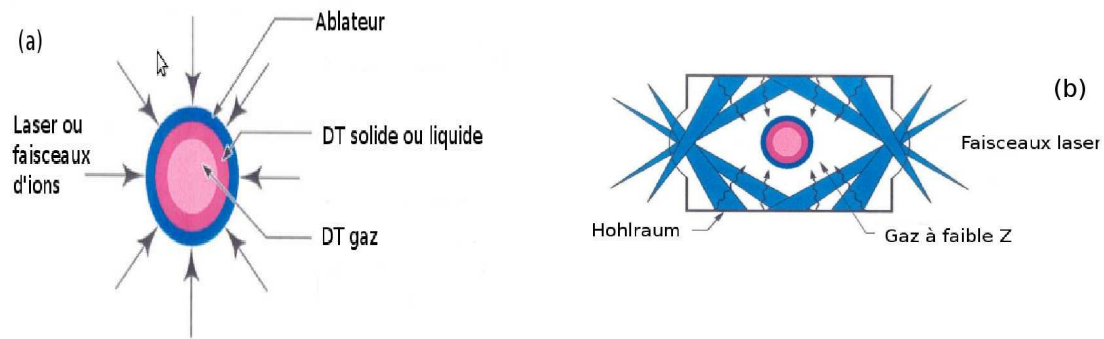
Les inconvénients liés au transport des électrons, notamment les instabilités (filamentation, Weibel), qui ont conduit à l'utilisation des faisceaux d'ions pour l'allumage rapide. En général, les faisceaux d'ions présentent l'avantage d'un dépôt en énergie très localisé grâce au pic de Bragg, d'une trajectoire en ligne droite à travers le combustible DT parce qu'ils subissent une faible déviation du fait du champ magnétique et de la diffusion des atomes. Pour l'allumage rapide avec des ions, on creuse d'abord la cible à l'aide d'un entonnoir au bout duquel est accolé une cible mince. Une impulsion laser vient ensuite ioniser la cible mince et créer en face arrière, à une distance très proche du cœur du combustible, des ions énergétiques qui vont assurer l'allumage et la fusion du DT au centre de la cible (le schéma de cette configuration pour la fusion est présenté sur la figure 2.5).

---

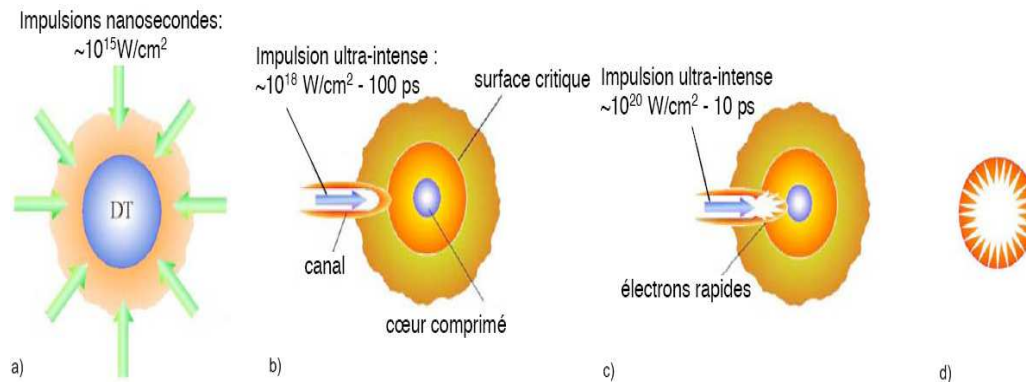
1. hohlraum est un mot allemand qui désigne le four à rayonnement utilisé pour la fusion, littéralement cavité.

2. <https://lasers.llnl.gov/>

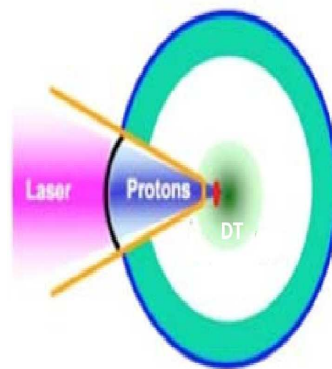




**FIGURE 2.3** – (a) schéma de l'attaque directe pour la fusion par confinement inertiel (b) schéma de l'attaque indirecte, les rayons bleus représentent les impulsions lasers venant irradier le matériau à haut Z contenu dans les parois du Hohlraum.



**FIGURE 2.4** – Différentes étapes pour l'allumage rapide avec des d'électrons : (a) compression (b) creusement du canal (c) dépôt d'électrons énergétiques (d) ignition.



**FIGURE 2.5** – Schéma de l'allumage rapide par guidage cône avec des protons. La cible pour produire les ions (par TNSA ou RPA) est la courbure noire.

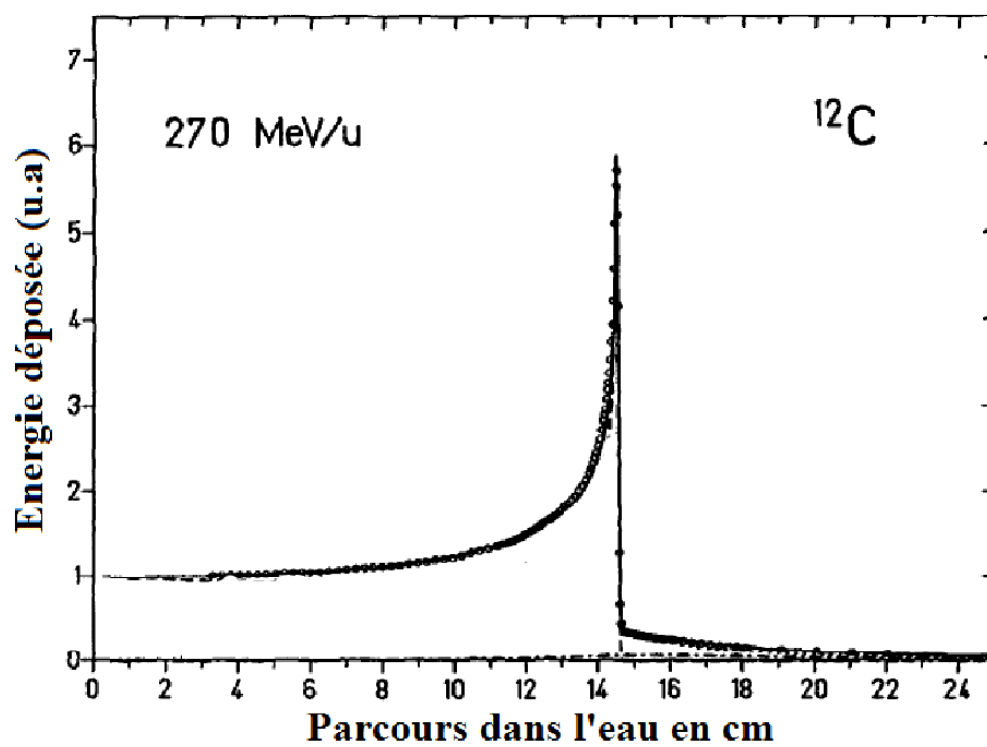
## 2.2.2 Proton-thérapie

L'idée d'utiliser les faisceaux de protons (ou d'ions) créés par laser pour le traitement des cancers est apparue depuis plus d'une dizaine d'années. Celle-ci est séduisante pour plusieurs raisons. D'abord, ils ont des propriétés de faisceaux très particulières, faible émittance, faible divergence, énergie grande, et peuvent être générés avec des installations (accélérateur laser-plasma) beaucoup plus compactes que les accélérateurs conventionnels. Avec ces faisceaux d'ions on dépose moins d'énergie sur le corps du patient que dans le cas de rayons X. L'avantage principal de l'utilisation des faisceaux d'ions pour le traitement des tumeurs réside dans leur profil profondeur-dose au travers d'un matériau, caractérisé par un plateau à faible dose au début puis un pic très important et localisé en fin de parcours ; le pic de Bragg. La figure 2.6 montre une mesure du dépôt d'énergie par un faisceau d'ions de  $^{12}\text{C}$  dans de l'eau, effectuée au GSI.

D'autre part, ces faisceaux semblent plus efficaces cliniquement que les X. En effet, il est estimé que probablement 12% des patients traités actuellement avec des faisceaux d'électrons ou des X seraient mieux pris en charge avec des faisceaux d'ions (Ledingham *et al.* [54]).

Le challenge pour l'application des faisceaux ions en proton-thérapie est d'avoir des ions avec un parcours minimale de 25 à 30 cm dans les tissus[55]. En terme d'énergie, il faut environ 200 à 225  $\text{MeV}$  de protons, ou 400 à 430  $\text{MeV}/u$  pour les ions de carbone. De telles énergies sont susceptibles d'être obtenues avec les lasers actuels. Cependant, cette énergie doit être celle déposée sur la surface du patient mais du fait du transport du faisceau et des pertes éventuelles qui lui sont associées, l'énergie du faisceau généré par l'accélérateur doit être bien supérieure à celles mentionnées ci-dessus. Le flux d'ions requis est de  $10^{10}$  protons par seconde, et un taux de répétition très haut, typiquement de l'ordre d'une dizaine de tirs par seconde (10  $\text{Hz}$ ), est nécessaire pour la proton-thérapie.

D'autres applications possibles des faisceaux d'ions existent, notamment comme outil d'imagerie lors de l'interaction laser plasma [56].



**FIGURE 2.6** – Exemple de mesure de profil dose-profondeur d'un faisceau de  $^{12}\text{C}$  à travers l'eau.  
 Cette figure est adaptée de la Ref. [53].

# Chapitre 3

## Généralités sur les plasmas

### 3.1 Plasma

Un plasma chaud cinétique est un gaz de particules chargées libres (électrons et ions), dans lequel l'énergie potentielle d'une particule due à son plus proche voisin est plus faible que son énergie cinétique. Ces interactions électromagnétiques confèrent au système son caractère collectif. Le plasma est le quatrième état de la matière, et il représente 99 % de la partie connue de l'univers. Les plasmas étudiés dans cette thèse sont ceux créés lors de l'interaction d'une impulsion laser avec des cibles solides. Enfin, notons que ce terme de plasma a été introduit pour la première fois par Langmuir en 1923 en étudiant les décharges électriques.

### 3.2 Description cinétique

La théorie cinétique offre une vision très détaillée des propriétés d'un plasma, contrairement à une théorie macroscopique. Elle est valable dans la limite de larges nombres de Debye  $N_{De}$ <sup>1</sup>. La démarche qui suit est présentée plus en détail dans de nombreux ouvrages, par exemple par Mihalas & Mihalas, dans [58], ou Krall & Trivelpiece, dans [59], ou Mora dans [60].

Pour décrire l'état physique d'un plasma, on introduit la fonction de distribution  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  d'une particule  $\alpha$ . Celle-ci est définie de telle façon que le nombre moyen de particules  $\alpha$  contenues à l'instant  $t$ , dans un élément de volume  $d\mathbf{r}$ , et un élément de vitesse  $d\mathbf{v}$ , est  $f_\alpha d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ . Parallèlement, pour  $v \rightarrow \pm\infty$  alors  $f_\alpha$  tend vers 0 suffisamment rapidement pour garantir qu'un nombre fini de particules puisse acquérir une énergie finie.

---

1. Le nombre de Debye est défini par  $N_{De} = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3$ , avec  $n_e$  la densité des électrons et  $\lambda_{De}$  la longueur d'écrantage du champ électrique du plasma par les électrons.

Ainsi l'évolution temporelle de la fonction de distribution d'une particule  $\alpha$  dans les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , dans le régime non relativiste, est donnée par :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (3.1)$$

où  $q_\alpha$  est la charge et  $m_\alpha$  la masse de la particule  $\alpha$ . Cette équation est connue sous le nom d'équation de Boltzmann non collisionnelle, ou plus généralement d'équation de Vlasov. Elle correspond à la conservation de la fonction de distribution de long de la trajectoire de chaque particule, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} f_\alpha [\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] = 0 \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{r}(t)$  et  $\mathbf{v}(t)$  satisfont les équations suivantes :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (3.4)$$

Noter que nous n'avons pas pris en compte les collisions entre espèces dans cette description, ce qui est justifié dans les plasmas très chauds. Par contre, dans le cas d'un plasma où les effets collisionnels sont importants, on rajoute un terme supplémentaire à l'équation de Vlasov, soit :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{Df}{Dt} \right)_{coll} \quad (3.5)$$

où  $\left( \frac{Df}{Dt} \right)_{coll}$ <sup>2</sup> est le terme collisionnel du plasma.

Cette modélisation d'un plasma se complète avec les équations de Maxwell, soit :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.9)$$

où la densité moyenne de charges  $\rho$  et le courant  $\mathbf{J}$  sont définis par

---

2. Une approximation du terme de collisions est donnée par  $\left( \frac{Df}{Dt} \right)_{coll} \simeq \frac{1}{\tau_{ei}} (f_\alpha - f_{\alpha_0})$ . Ici  $\tau_{ei}$  est le temps de relaxation, et  $f_{\alpha_0}$  est la fonction de distribution vers laquelle relaxe  $f_\alpha$ .

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (3.11)$$

En outre, les grandeurs macroscopiques du plasma sont déterminées grâce aux moments de la fonction de distribution  $f_{\alpha}$ . La densité et la vitesse moyennes des particules à la position  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$ , s'écrivent :

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_{\alpha}(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.13)$$

### 3.3 Description fluide

Le modèle cinétique offre une description détaillée des gaz, mais conduit souvent à des calculs fastidieux puis très coûteux en temps de calcul et ainsi ne permet d'étudier que de petits volumes de plasmas. En revanche, la théorie fluide présente l'avantage d'une relative simplicité, comme nous le constaterons en établissant à partir de l'équation de Vlasov les équations fluides qui régissent le plasma.

En effet en intégrant l'équation (3.1) sur la vitesse, et en utilisant les définitions macroscopiques (3.12-3.13), on obtient l'équation de conservation de la densité :

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = 0 \quad (3.14)$$

En multipliant (3.14) par la charge d'une espèce  $q_{\alpha}$ , on en déduit l'équation de continuité de la charge, soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.15)$$

De même en multipliant l'équation (3.1) par la vitesse  $\mathbf{v}$ , puis en l'intégrant à nouveau sur la vitesse, on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_{\alpha} m_{\alpha}} \nabla \cdot \vec{P}_{\alpha} \quad (3.16)$$

où le tenseur de pression  $\vec{P}_\alpha$  s'écrit :

$$\vec{P}_\alpha = m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.17)$$

Enfin, le modèle fluide se complète avec l'équation de conservation de l'énergie que l'on peut obtenir en multipliant l'équation de Vlasov (3.1) par  $\frac{1}{2}m_\alpha v^2$  puis en l'intégrant sur la vitesse. Il existe plusieurs formes pour cette équation, celle donnée ici nous semble la plus simple :

$$\begin{aligned} n_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \right) \left( \frac{3}{2}k_B T_\alpha + \frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 \right) + \nabla \cdot (P_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \\ = \nabla \cdot (\vec{\tau}_\alpha : \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{q}_\alpha) + n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $\vec{\tau}_\alpha$  est le tenseur des contraintes visqueuses et  $\mathbf{q}_\alpha$  le vecteur du flux de chaleur.

Ce système d'équations ainsi formées par les équations de conservation de la densité de espèces  $\alpha$ , du moment et de l'énergie est une succession de moment d'ordre supérieur de la fonction de distribution. Pour résoudre ce système il est nécessaire de couper cette chaîne infinie que forment ces équations. Pour ce faire, nous avons besoin d'une relation liant le moment d'ordre supérieur aux moments d'ordres inférieures. Cette relation est l'équation de fermeture du système, et s'écrit souvent comme

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(T_e, \mathcal{E}) \quad (3.19)$$

### 3.4 Conclusion

Après avoir cadré les théories cinétique et fluide, nous allons les appliquer à l'étude des plasmas créés par laser. Dans la première partie de cette thèse, on regardera l'expansion dans le vide d'un plasma semi-infini avec une fonction de distribution des électrons bi-Maxwellienne, à l'aide d'une description fluide. Pour la fermeture du système, on usera de l'hypothèse d'un plasma isotherme au sens où la température de chaque espèce d'électrons est indépendante du temps. Ce modèle ne tenant pas compte du refroidissement des électrons, il est clair que les résultats obtenus ne peuvent être pertinents que sur la durée de propagation de l'impulsion laser, car les électrons commencent à perdre leur énergie aussitôt après l'arrêt du laser. Par ailleurs, une description cinétique de la dynamique des électrons semble plus en accord avec les résultats expérimentaux. Ceci nous amène à la deuxième partie de notre étude où l'on examine l'expansion dans le vide d'un plasma de taille finie à l'aide d'un code cinétique, avec des conditions initiales identiques à celles utilisées dans la première partie.

## **Première partie**

### **Étude fluide de l'expansion d'un plasma bi-Maxwellien**



# Chapitre 4

## Expansion d'un plasma semi-infini

Ce chapitre est consacré à l'étude fluide de l'expansion dans un vide d'un plasma semi-infini composé de deux populations d'électrons avec une fonction de distribution bi-Maxwellienne. Dans un premier temps, nous allons exposer les équations décrivant l'expansion du plasma, en nous appuyant essentiellement sur le papier de Bezzerides *et al.* [21] (le calcul effectué par Morse & Nielson [19] est présenté en Annexe A). Nous allons par la suite discuter l'apparition d'une onde de choc de raréfaction dans le plasma, et donner les différentes caractéristiques de celle-ci en fonction des paramètres initiaux de l'expansion. On va également analyser les résultats des simulations numériques obtenus avec un code fluide et les comparer avec ceux du modèle analytique. Enfin, les effets sur l'accélération des ions de la présence simultanée d'électrons de basse et de haute énergie dans le plasma seront élucidés.

### 4.1 Modèle de plasma

#### 4.1.1 Équations générales

Nous considérons, à l'instant  $t = 0$ , un plasma unidimensionnel composé d'ions immobiles de masse  $m_i$ , de charges  $Ze$ , et de densité uniforme  $n_u/Z$ , occupant le demi-espace  $x \leq 0$ , et d'électrons en équilibre avec le potentiel électrostatique  $\phi(x, t = 0)$  résultant de la séparation de charges aux bords du plasma. La densité et la pression des électrons sont des fonctions de la variable  $\phi$ , et s'écrivent comme  $n_e(\phi)$  et  $P(\phi)$  respectivement. De plus, nous supposons que le potentiel s'annule dans la région non perturbée du plasma, ce qui se traduit par :

$$\phi(x < 0, |x| \rightarrow \infty) = 0 \quad (4.1)$$

avec  $n_e(0) = n_u$ . Dans la suite, l'indice ' $u$ '<sup>1</sup> renvoie aux grandeurs non perturbées du plasma.

---

1. Par souci de clarté, nous conservons la même notation que celle utilisée dans nos publications

A  $t > 0$ , la dynamique des ions est décrite par les équations fluides. Celles-ci s'écrivent :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.3)$$

où  $n(x, t)$  est la densité des ions multipliée par  $Z$ ,  $v(x, t)$  est la vitesse des ions, et  $m = m_i/Z$  est la masse des ions normalisée avec le nombre de charge. Par ailleurs, le potentiel  $\phi(x, t)$  est désormais une fonction du temps.

Du fait de la faible inertie des électrons comparée aux ions ( $m_e/m_i \ll 1$ ), les électrons peuvent être considérés en équilibre avec le potentiel  $\phi(x, t)$ , à chaque position  $x$  et à chaque instant  $t$ . En utilisant l'équation du mouvement des électrons, la condition d'équilibre s'exprime alors sous la forme :

$$n_e(\phi) = \frac{1}{e} \frac{dP}{d\phi} \quad (4.4)$$

Ou encore de façon équivalente, considérant la pression  $P$  comme une fonction de  $x$  et de  $t$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{en_e} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.5)$$

Enfin, le potentiel électrique vérifie l'équation de Poisson. Cette dernière est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n) \quad (4.6)$$

Cette équation permet de tenir compte des effets de séparation de charges entre les électrons et les ions qui se produisent lors de l'expansion. Ce modèle d'expansion suppose que le plasma est une source infinie de particules et d'énergie; autrement dit que la température et la densité des particules, dans le plasma non perturbé, restent indépendantes du temps.

### 4.1.2 Expansion quasi-neutre : solution auto-semblable

Une solution auto-semblable de l'expansion dans un vide d'un plasma semi-infini a été obtenue pour la première fois par Gurevich [3] puis par Allen & Andrews [4] pour l'expansion d'un plasma quasi-neutre et isotherme.

Nous allons d'abord établir la solution auto-semblable dans cette hypothèse d'une expansion quasi-neutre.

Si la longueur caractéristique locale de la densité ionique  $L = |n/(\partial n/\partial x)|^{-1}$  est plus grande que la longueur locale de Debye  $\lambda_D = [\epsilon_0/e(dn_e/d\phi)]^{1/2}$ , il est en effet

raisonnable de supposer la quasi-neutralité du plasma. Par conséquent, on peut écrire la relation suivante :  $n \approx n_e(\phi)$ . Cette hypothèse libère les équations décrivant l'écoulement de toute dépendance vis-à-vis d'une quelconque longueur caractéristique du plasma. Les variables  $x$  et  $t$  vont apparaître au travers de ce problème uniquement sous la forme du rapport  $\xi = x/t$ . En conséquence les équations fluides décrivant la dynamique du plasma peuvent se simplifier ainsi en :

$$(v - \xi) \frac{dn}{d\xi} = -n \frac{dv}{d\xi} \quad (4.7)$$

$$(v - \xi) \frac{dv}{d\xi} = -\frac{c_s^2}{n} \frac{dn}{d\xi} \quad (4.8)$$

avec

$$c_s^2 = \frac{n_e}{dn_e/d\varphi} = \frac{1}{m} \frac{dP}{dn_e} \quad (4.9)$$

où nous avons défini  $\varphi = e\phi/m$  et  $c_s$  représente la vitesse du son du plasma.

Pour  $dn/d\xi \neq 0$ , le système d'équations formées par les équations (4.7) et (4.8) admet une solution si seulement et si :

$$(v - \xi)^2 = c_s^2 \quad (4.10)$$

La solution correspondant à une expansion dans la direction  $x > 0$  est donnée par :

$$v = \xi + c_s \quad (4.11)$$

Par la suite, on introduit (4.11) dans (4.8), puis utilisant (4.9) on trouve une relation entre le potentiel électrique  $\varphi$  et la position  $\xi$  sous la forme :

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = - \left( \frac{1}{c_s} + \frac{dc_s}{d\varphi} \right) \quad (4.12)$$

Si on se donne une distribution en densité des électrons, la solution générale pour l'écoulement s'obtient en intégrant (4.12), afin d'obtenir  $\xi$  comme une fonction de  $\varphi$ .

### Plasma avec une température d'électrons

Pour un plasma avec une seule population d'électrons, avec une distribution en densité sous la forme  $n_e(\phi) = n_u \exp(e\phi/k_B T_e)$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, la solution de l'expansion est donnée pour  $x + c_s t > 0$  par :

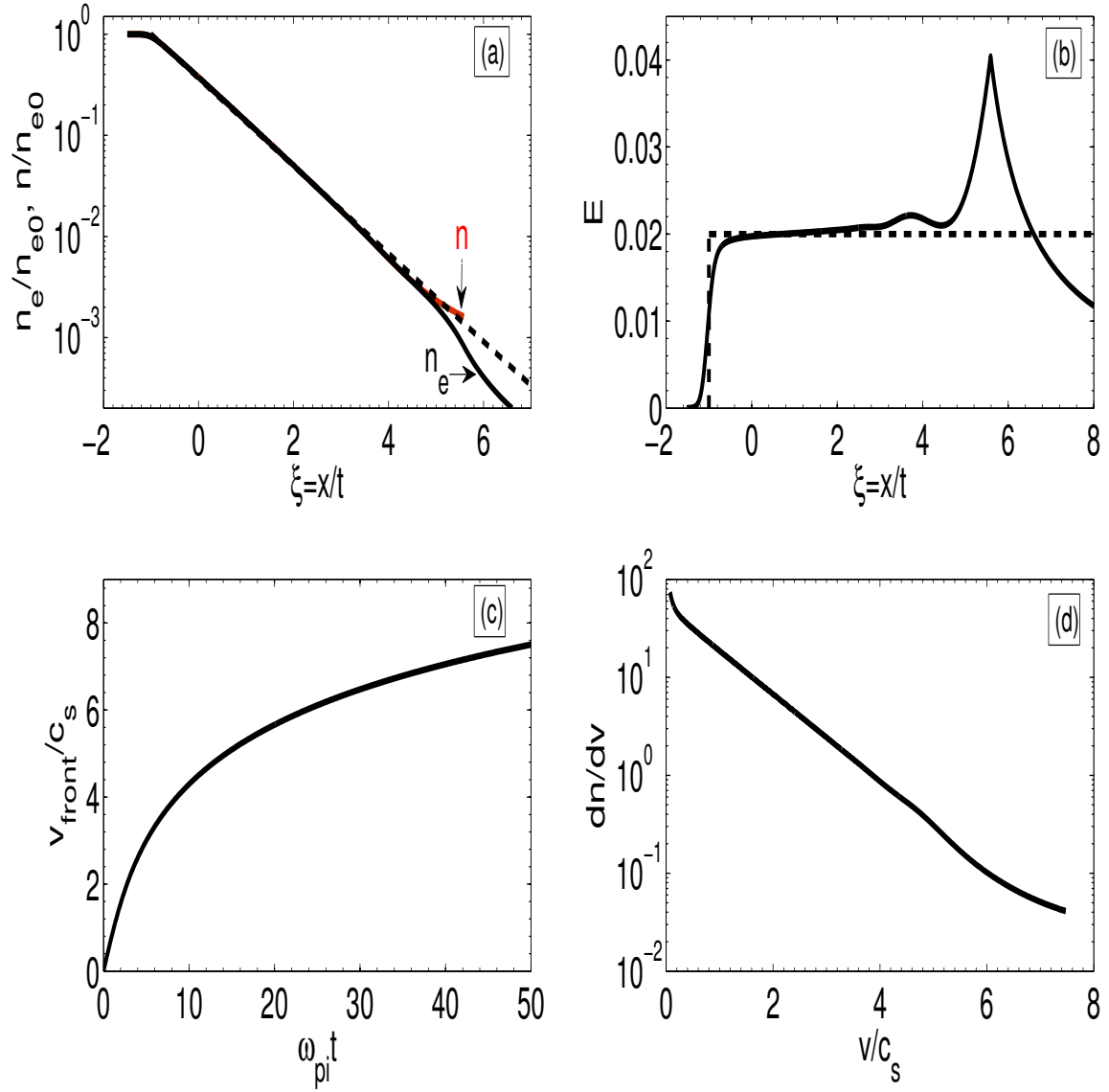
$$\begin{aligned}
n_e &= n_u \exp(-1 - \xi/c_s) \\
v &= c_s + \xi \\
\varphi &= -c_s^2 (1 + \xi/c_s)
\end{aligned}$$

Une analyse théorique plus complète, affranchie de l'hypothèse de quasi-neutralité, a été obtenue avec le modèle de Mora [7], donnant une description de la position du front d'ions et de l'énergie maximale des ions. La vitesse du front d'ions est donnée par la relation :

$$v_{front} = 2c_s \ln \left( \tau + \sqrt{\tau^2 + 1} \right) \quad (4.13)$$

La figure 4.1 montre un résumé de la solution des équations (4.7)-(4.8) couplées avec celle de Poisson (4.6). La solution auto-semblable est également représentée en pointillés sur les figures 4.1(a) et 4.1(b). Le pic sur le profil du champ électrique [Fig.4.1(b)] correspond au front d'ions, résultant de la séparation de charges entre les ions et les électrons. Le front d'ions n'est pas décrit par modèle auto-semblable. On peut souligner l'évolution en exponentielle décroissante avec la vitesse du spectre des ions, illustrée sur la figure 4.1(d).

Ce modèle prédit une évolution infinie dans le temps de l'énergie maximale des ions accélérés lors de l'expansion. Ce qui peut poser un problème du fait de la durée finie de l'expansion. Pour expliquer les résultats expérimentaux, il est donc nécessaire de trouver un critère physique qui limite la durée de l'expansion. En effet, si on définit  $\tau_L$  comme la durée de l'impulsion laser, le temps effectif de l'accélération  $\tau_{acc}$  est approximativement  $\tau_{acc} \simeq 1.3 \tau_L$ . Ce critère a été établi expérimentalement par Fuchs *et al.* [33]. En fait le caractère isotherme de l'expansion est invalidée par le refroidissement des électrons en faveur des ions, qui se produit pour des plasmas de tailles finies.



**FIGURE 4.1** – Profils spatiaux en fonction de  $\xi$  au temps  $\omega_{pi}t = 50$  (a) de la densité des électrons et des ions (b), du champ électrique. (c) vitesse du front d'ions en fonction du temps. (d) spectre des ions au temps  $\omega_{pi}t = 50$ . Les pointillés sur (a) et (b) représentent la solution quasi-neutre. Le champ électrique est normalisé à  $E_0 = (n_u k_B T_e / \epsilon_0)^{1/2}$ .

## Plasma à deux températures d'électrons

On considère maintenant un plasma composé de deux populations d'électrons ; une chaude et une froide, de température  $T_h$  et  $T_c$  respectivement. Leur densité suit une distribution de Boltzmann, qui peut s'écrire sous la forme :

$$n_e(\phi) = n_h(\phi) + n_c(\phi) \quad (4.14)$$

$$= n_{hu} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_h}\right) + n_{cu} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_c}\right) \quad (4.15)$$

où  $n_{hu}$  représente la densité des électrons chauds et  $n_{cu}$  celle des électrons froids dans le plasma non perturbé. Les ions de densités  $n_u$  occupent toujours le demi-espace  $x \leq 0$  avec la condition suivante :  $n_{hu} + n_{cu} = n_u$ . L'expression de la vitesse du son dans ce cas est donnée par :

$$c_s(y) = c_{sh} \sqrt{\frac{1+y}{\alpha+y}} \quad (4.16)$$

avec  $c_{sh} = (k_B T_h / m)^{1/2}$  la vitesse du son associée aux seuls électrons chauds, et où nous avons également défini quelques paramètres physiques cruciaux pour notre étude :

$$\alpha = T_h / T_c, \quad y(\phi) = n_h / n_c \quad \text{et} \quad y_u = n_{hu} / n_{cu}$$

Les solutions auto-semblables de l'expansion quasi-neutre s'écrivent pour  $x + c_s t > 0$  :

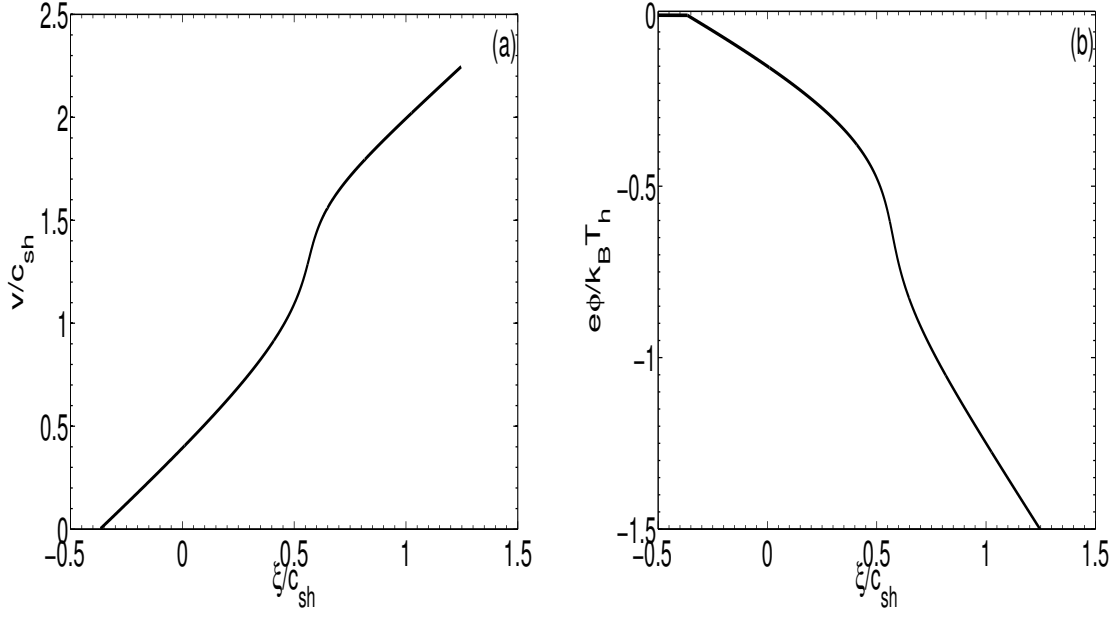
$$v = \xi + c_s \quad (4.17)$$

$$n = n_{cu} \exp(e\phi / k_B T_c) + n_{hu} \exp(e\phi / k_B T_h) \quad (4.18)$$

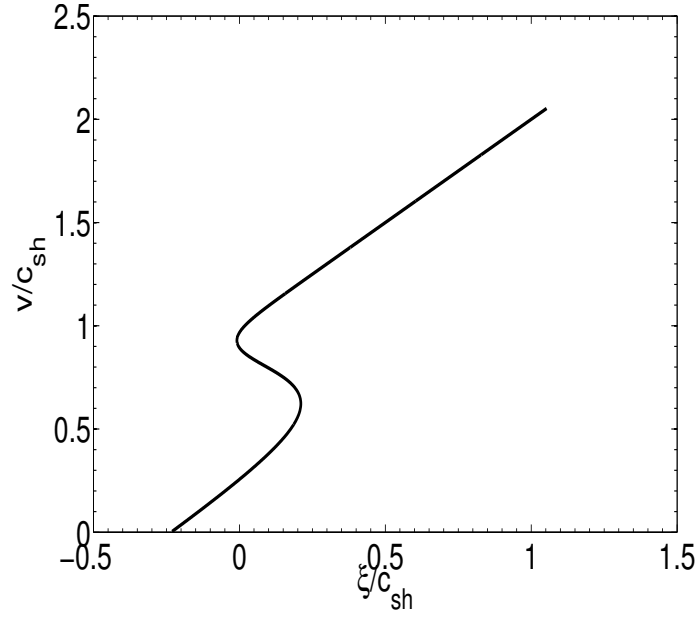
Pour obtenir l'expression du potentiel électrique on introduit (4.16) dans (4.12), puis en prenant l'inverse, on trouve :

$$\frac{e}{m} \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{2(\alpha+y)^{3/2} (1+y)^{1/2}}{(\alpha-1)^2 y - 2(\alpha+y)^2} c_{sh} \quad (4.19)$$

On intègre numériquement cette équation, c'est-à-dire  $\xi$  en fonction  $\varphi$ , pour  $\alpha$  et  $y_u$  donnés. Les résultats obtenus suite à la résolution des Eqs. (4.17)-(4.19) sont présentés sur la figure 4.2, pour  $\alpha = 8$  et  $y_u = 10^{-1}$ . Les solutions auto-semblables montrent un écoulement en deux phases, illustré par la région d'expansion des électrons froids précédée du plasma non perturbé, puis la région d'expansion des électrons chauds jusqu'au front d'ions. Cependant, pour un rapport en température  $\alpha = 20$  et un rapport en densité dans le plasma non perturbé  $y_u = 10^{-1}$ , on obtient une solution multivaluée pour l'expansion comme le montre la figure 4.3, invalidant ainsi les solutions auto-semblables obtenues avec l'hypothèse quasi-neutre. Ce point sera étudié dans la section suivante.



**FIGURE 4.2** – *Profils spatiaux de la vitesse (a) et de la densité (b) des ions en fonction de  $\xi$  pour  $\alpha = 8$  et  $y_u = 10^{-1}$ , tirée de l'intégration de la formule (4.19).*



**FIGURE 4.3** – *Profil spatial de la vitesse des ions pour  $\alpha = 20$  et  $y_u = 10^{-1}$ , tirée de l'intégration de la formule (4.19).*

### 4.1.3 Impossibilité d'une solution auto-semblable

On cherche une explication à la rupture de validité de l'hypothèse quasi-neutre pour certaines valeurs du rapports en température  $\alpha$ . Celle-ci se traduit par l'existence de solutions multivaluées avec le modèle quasi-neutre.

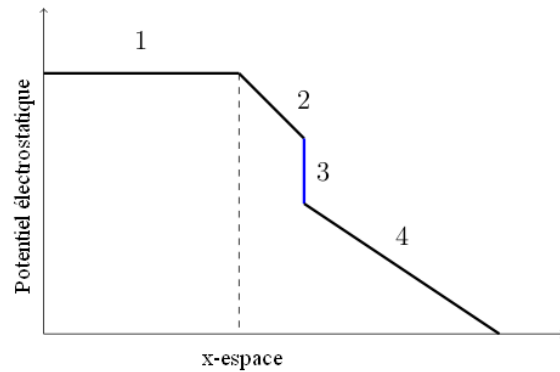
Il peut arriver, pour certains fluides, que la partie droite de l'équation (4.12) soit positive pour certaines valeurs du potentiel  $\varphi$ . Cette situation correspond aux fluides dont la dérivée seconde ( $\partial^2 P / \partial V^2$ ) est négative sur une partie de la courbe d'Hugoniot; c'est-à-dire que le diagramme (P, V) est localement concave. En thermodynamique, on parle de fluides anormaux ou plus précisément avec des propriétés thermodynamiques anormales. Précisons qu'une telle configuration quoique très rare dans les gaz avec des propriétés thermodynamiques normales, peut être présente lors de la transition de phase chez certains matériaux.

Cette condition s'écrit :

$$c_s \frac{dc_s}{d\varphi} \leq -1 \quad (4.20)$$

La résolution de cette inégalité aboutit alors à une solution mathématique où  $\varphi$  est une fonction multivaluée de  $\xi$  sur un intervalle bien déterminé. Physiquement, un choc de raréfaction apparaît dans le milieu, comme l'ont montré Bezzerides *et al.* [21] dans le cas de l'expansion d'un plasma à deux températures d'électrons. Le schéma ?? montre la structure possible de l'écoulement lorsqu'une discontinuité apparaît dans le plasma.

Nous prolongeons ici cette étude en complétant et en corrigeant (si nécessaire) les différents résultats obtenus dans les précédentes études concernant la structure de l'expansion du plasma et les éléments du choc de raréfaction.



**FIGURE 4.4** – Ce schéma illustre la structure de l'écoulement avec la présence d'une discontinuité séparant l'expansion lente à l'expansion rapide. 1- Le plasma non-perturbé, 2- L'expansion lente, 3- La discontinuité, 4- L'expansion rapide.



## 4.2 Caractéristiques de la discontinuité

### 4.2.1 Relations de Rankine-Hugoniot

Dans cette partie nous allons déterminer les différentes caractéristiques du choc. Pour cela les expressions de la vitesse en amont et en aval du choc, l'amplitude du saut en potentiel du choc, et le champ électrique à l'intérieur de la discontinuité seront établies.

On désigne par  $\xi_s$  le paramètre de similarité correspondant à la position du choc de raréfaction. Considérant le choc comme une discontinuité stationnaire dans le référentiel en mouvement (voir Annexe 1 pour s'en convaincre), les équations de conservation du flux de masse et de l'énergie dans ce référentiel peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dx}(nu) = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2 + \varphi\right) = 0 \quad (4.22)$$

où  $u = v - \xi_s$  est la vitesse relative de l'écoulement par rapport au choc.

Nous souhaitons maintenant établir l'équation de conservation du moment en tenant compte des effets de séparation de charges à l'intérieur du choc. En introduisant la relation d'équilibre liant la densité des électrons et la dérivée de la pression par rapport à  $\phi$  (4.4) dans l'équation de Poisson (4.6), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{e} \frac{dP}{d\phi} - n \right) \quad (4.23)$$

On multiplie cette équation par  $d\phi/dx$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dP}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} - \frac{e}{\epsilon_0} n \frac{d\phi}{dx} \quad (4.24)$$

Ensuite, on multiplie (4.21) par  $u$  et (4.22) par  $n$ , puis additionnant les deux équations, nous obtenons  $nd\varphi/dx = -d(nu^2)/dx$ . On reporte ce résultat dans (4.24)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d(nmu^2)}{dx} \quad (4.25)$$

$$= \frac{m}{\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left( \frac{P}{m} + nu^2 \right) \quad (4.26)$$

Une simplification supplémentaire peut être faite en remplaçant  $\phi$  par  $m\varphi/e$ , l'équation de conservation du moment au travers du choc se réduit alors à :

$$\frac{d}{dx} \left[ nu^2 + \frac{P}{m} - \frac{\epsilon_0 m}{2e^2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.27)$$

Le dernier terme de cette équation correspond à la densité d'énergie électrostatique à l'intérieur du choc de raréfaction. La résolution de cette équation nous permet donc d'avoir le champ et le potentiel électrique à l'intérieur de la discontinuité.

### Les conditions du saut

Par la suite nous intégrons les équations (4.21), (4.22) et (4.27) par rapport à  $x$  pour avoir les conditions du saut au travers de la discontinuité. Celles-ci sont données par :

$$n_0 u_0 = n_1 u_1 \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{2} u_0^2 + \varphi_0 = \frac{1}{2} u_1^2 + \varphi_1 \quad (4.29)$$

$$n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m} = n_1 u_1^2 + \frac{P_1}{m} \quad (4.30)$$

où les indices '0' et '1' dénotent les conditions en amont et en aval du choc. Pour la dernière équation (4.30), nous avons pris en compte le fait que le terme au carré du champ électrique dans (4.27) varie comme  $E_0 \propto 1/(\omega_{pi0} t)^2$  en amont du choc où  $\omega_{pi0} = (n_0 e^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$  est la fréquence plasma ionique. Dans la limite d'un temps d'écoulement suffisamment long,  $\omega_{pi0} t \gg 1$ , on peut donc raisonnablement négliger les termes du champ électrique en amont et en aval du choc puisque  $E_0 \rightarrow 0$ , de la même manière  $E_1 \rightarrow 0$ . Rappelons que les équations (4.28)-(4.30), forment ce qu'on appelle en physique des fluides les relations de Rankine-Hugoniot.

En combinant les équations de conservation du flux de particules, de l'énergie et du moment au travers de la discontinuité nous obtenons une relation bien plus générale reliant l'amplitude du saut en potentiel du choc, la pression et la densité en amont et en aval de la discontinuité ; la relation d'Hugoniot. Celle-ci s'écrit sous la forme :

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \left( \frac{P_0 - P_1}{2m} \right) \left( \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1} \right) \quad (4.31)$$

La résolution de cette équation nous permet de remonter à toutes les caractéristiques du choc de raréfaction. Elle nécessite au préalable de connaître l'équation d'état du plasma.

## 4.2.2 Conditions d'existence de la discontinuité

On s'intéresse maintenant aux conditions d'existence du choc. Celles-ci doivent pouvoir être déterminées en fonction des paramètres du plasma. Tout d'abord, nous souhaitons établir une expression de l'énergie électrostatique à l'intérieur du choc. Pour cela, on intègre (4.27) de la position amont du choc à une position aval quelconque, ce qui donne :

$$n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m} = n u^2 + \frac{P}{m} - \frac{\epsilon_0 m}{2e^2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \quad (4.32)$$

où nous avons encore négligé le terme du champ électrique en amont de la discontinuité du fait de son caractère autosemblable. On intègre (4.21) et (4.22) sur le même intervalle, puis les combinant ensemble, on obtient :

$$n u^2 = n_0 u_0 [u_0^2 - 2(\varphi - \varphi_0)]^{1/2} \quad (4.33)$$

On reporte ensuite (4.33) dans (4.32)

$$n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m} = n_0 u_0 [u_0^2 - 2(\varphi - \varphi_0)]^{1/2} + \frac{P}{m} - \frac{\epsilon_0 m}{2e^2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \quad (4.34)$$

L'énergie électrostatique en aval du choc vaut alors :

$$\frac{\epsilon_0 m}{2e^2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = F(\varphi) \quad (4.35)$$

où

$$F(\varphi) = n_0 u_0 \sqrt{u_0^2 + 2(\varphi_0 - \varphi)} - n_0 u_0^2 + \frac{P - P_0}{m} \quad (4.36)$$

### Étude de la fonction $F(\varphi)$

Dans le but d'établir les conditions de l'occurrence du choc de raréfaction dans le plasma, nous allons étudier les propriétés de la fonction  $F(\varphi)$ .

D'une part, la dérivée première de  $F(\varphi)$  par rapport à  $\varphi$  s'écrit :

$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{n_0 u_0}{\sqrt{u_0^2 + 2(\varphi_0 - \varphi)}} + \frac{1}{m} \frac{dP}{d\varphi} \quad (4.37)$$

$$= -n + n_e \quad (4.38)$$

où nous avons utilisé les équations (4.21) et (4.22) pour le premier terme à droite et la relation d'équilibre liant la densité à la pression électronique (4.4) pour le second terme. Nous faisons remarquer que cette relation n'est rien d'autre que l'équation de Poisson.

D'autre part, si on dérive l'équation (4.38) par rapport à  $\varphi$ , on obtient :

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{dn_e}{d\varphi} - \frac{dn}{d\varphi} \quad (4.39)$$

$$= \frac{dn_e}{dP} \frac{dP}{d\varphi} - \frac{dn}{d\varphi} \quad (4.40)$$

En introduisant l'expression de la vitesse acoustique ionique  $c_s^2 = \frac{1}{m} \frac{dP}{dn_e}$  et l'équation (4.4) dans (4.40), on trouve :

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{n_e}{c_s^2} - \frac{dn}{d\varphi} \quad (4.41)$$

On peut encore simplifier cette relation en dérivant par rapport à  $\varphi$  les équations de conservation du flux de masse (4.21) et de l'énergie (4.22) au travers du choc, on obtient :

$$\begin{aligned} n \frac{du}{d\varphi} + u \frac{dn}{d\varphi} &= 0 \implies \frac{dn}{d\varphi} = -\frac{n}{u} \frac{du}{d\varphi} \\ u \frac{du}{d\varphi} + 1 &= 0 \implies \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{u} \end{aligned}$$

En combinant ces deux équations on trouve :

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{n}{u^2} \quad (4.42)$$

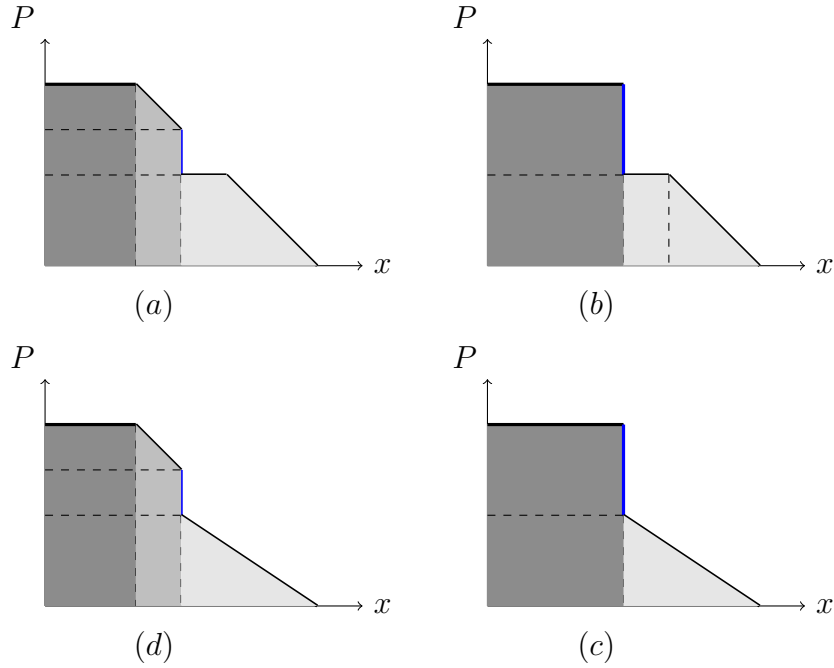
On reporte ce résultat dans (4.41), on obtient finalement une relation de la dérivée seconde de  $F(\varphi)$  sous la forme :

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{n_e}{c_s^2} - \frac{n}{u^2} \quad (4.43)$$

Cette fonction  $F(\varphi)$  et sa dérivée première  $dF(\varphi)/d\varphi$  s'annulent des deux côtés de la discontinuité. Ceci du fait de l'établissement d'un écoulement quasi-neutre sur des temps d'expansion longs. En conséquence le champ électrique et la séparation de charges s'annulent des deux côtés de la discontinuité. Par ailleurs, selon (4.35)  $F(\varphi)$  est positive dans l'intervalle  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_0$ , donc sa dérivée seconde  $F''(\varphi)$  doit être positive en  $\varphi_0$  et en  $\varphi_1$ . Ces deux conditions se traduisent par :

$$\left. \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_0} = \frac{n_{e0}}{c_{s0}^2} - \frac{n_0}{u_0^2} \geq 0 \quad \text{soit} \quad u_0 \geq c_{s0} \quad (4.44)$$

$$\left. \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_1} = \frac{n_{e1}}{c_{s1}^2} - \frac{n_1}{u_1^2} \geq 0 \quad \text{soit} \quad u_1 \geq c_{s1} \quad (4.45)$$



**FIGURE 4.5** – Les différentes configurations possibles pour la structure de l'écoulement lors de l'occurrence d'un choc de raréfaction dans le plasma. (a)  $u_0 = c_{s0}$ ,  $u_1 > c_{s1}$ ; (b)  $u_0 > c_{s0}$ ,  $u_1 > c_{s1}$ ; (c)  $u_0 = c_{s0}$ ,  $u_1 = c_{s1}$ ; (d)  $u_0 > c_{s0}$ ,  $u_1 = c_{s1}$ .

où  $c_{s0}$  et  $c_{s1}$  correspondent aux vitesses du son en amont et en aval de la discontinuité et où nous avons pris en compte le fait que  $F$  et  $F'$  s'annulent des deux côtés de la discontinuité.

En résumé pour que le choc de raréfaction puisse exister et se propager dans le plasma, l'écoulement doit nécessairement vérifier les conditions suivantes :

$$u_0 \geq c_{s0} \quad (4.46)$$

$$u_1 \geq c_{s1} \quad (4.47)$$

En d'autres termes, l'écoulement doit être sonique (ou supersonique) des deux côtés de la discontinuité. Les différentes configurations possibles de la structure de l'écoulement en présence du choc de raréfaction sont illustrées sur la figure 4.5.

Par ailleurs quand le champ électrique atteint son maximum, nous avons  $F'(\varphi_{max}) = 0$  soit  $n_e(\varphi_{max}) = n(\varphi_{max}) = n_m$ . En reportant ce résultat dans (4.43), la dérivée seconde de  $F(\varphi)$  vérifie alors :

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{n_m}{c_{sm}^2} \left( 1 - \frac{c_{sm}^2}{u_m^2} \right) \leq 0 \quad (4.48)$$

Ainsi, le champ électrique associé au choc de raréfaction atteint son maximum à l'endroit où l'écoulement est subsonique.

## Vitesse du son

Il est d'usage en physique des plasmas de définir la vitesse du son par rapport à la densité des électrons  $n_e$ . Cependant, une méthode alternative pour définir la vitesse du son est par référence à la densité des ions  $n$ . Autrement dit :

$$c_{si}^2 = \frac{1}{m} \frac{dP}{dn} \quad (4.49)$$

Les deux expressions de la vitesse du son  $c_s$  et  $c_{si}$  coïncident dans la partie quasi-neutre de l'expansion, mais diffèrent à l'intérieur du choc. On cherche à exprimer  $c_{si}$  avec les grandeurs de l'écoulement. Pour cela, on réécrit (4.49) sous la forme :

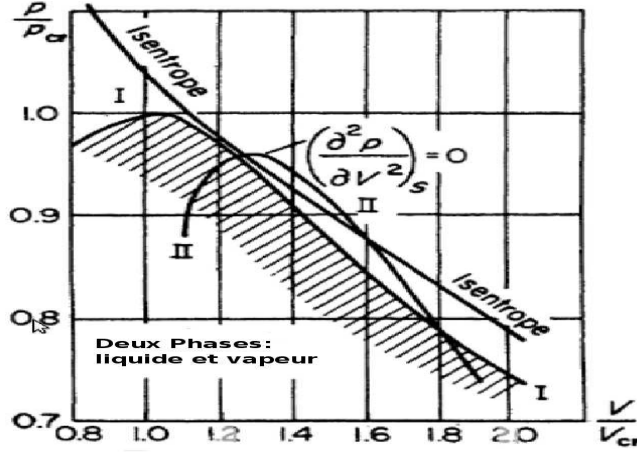
$$c_{si}^2 = \frac{1}{m} \frac{dP}{dn} = \frac{1}{m} \frac{dP}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dn} \quad (4.50)$$

En insérant (4.4) et (4.42) dans (4.50), on trouve :

$$c_{si}(\varphi) = \sqrt{\frac{n_e}{n}} u \quad (4.51)$$

Maintenant, si on raisonne par rapport à cette nouvelle définition de la vitesse du son  $c_{si}$ , on constate que l'écoulement est sonique en amont et en aval de la discontinuité ;  $c_{si}(\varphi_0) = u_0$  et  $c_{si}(\varphi_1) = u_1$ , du fait de la quasi-neutralité du plasma des deux côtés de la discontinuité. Par contre à l'intérieur du choc de raréfaction, il devient subsonique puis supersonique.

Pour finir, notons les similitudes avec l'occurrence d'un choc de raréfaction dans un milieu faisant l'objet d'une transition de phase avec  $(\partial^2 P / \partial V^2)_S < 0$  où  $S$  est l'entropie du système. L'existence de ce type de discontinuité a été discutée schématiquement par Bethe [34] et plus en détail par Zel'dovich et Raizer [35]. Dans ce cas, la condition (4.20) s'écrit plutôt  $(\partial^2 P / \partial V_e^2)_{T_h, T_c} < 0$ , et le point de discontinuité des pentes est dans la région en aval du choc, et non dans la région amont du choc. Cette transition de phases, qui s'accompagne d'un changement de signe de  $(\partial^2 P / \partial V^2)_S$  (où  $S$  est l'entropie du système) sur une portion du diagramme  $(P, V)$  est illustrée sur la figure 4.6 dans le cas de l'interaction des molécules d'un gaz de Van der Waals.



**FIGURE 4.6** – Isentrope d'un gaz de Van der Waals. Le domaine hachuré correspond à la région de transition de phases (liquide-vapeur). La courbe II entoure la région où l'isentrope est concave localement ( $\partial^2 P / \partial V^2 < 0$ ). Cette figure est adaptée de la Ref. [35].

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle physique de l'expansion d'un plasma semi-infini dans le vide. Avec l'hypothèse d'un écoulement quasi-neutre, nous avons établi les solutions auto-semblables de l'expansion puis précisé les limites de validité de celles-ci. La solution quasi-neutre obtenue se caractérise par une expansion lente associée aux électrons de basse énergie et une expansion rapide dominée par les électrons de haute énergie. Nous avons vu que si l'inégalité suivante

$$c_s \frac{dc_s}{d\varphi} \leq -1$$

est vérifiée, alors il y a une rupture de validité de l'expansion quasi-neutre. Celle-ci se manifeste par l'existence de solutions multi-valuées pour l'expansion. Physiquement, on voit apparaître dans le plasma un choc de raréfaction séparant spatialement l'expansion lente de l'expansion rapide. A l'aide des relations de saut au travers de la discontinuité et de l'équation de Poisson, nous avons établi deux conditions portant sur la structure de l'écoulement :

$$u_0 \geq c_{s0}, \quad u_1 \geq c_{s1}$$

Celles-ci indiquent que l'écoulement en amont et en aval du choc doivent être soniques (ou supersoniques). De plus si l'écoulement en aval est supersonique, alors un plateau sépare le choc de raréfaction de la région d'expansion dominée par les électrons rapides.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier en détail les caractéristiques microscopiques du choc de raréfaction (amplitude, champ électrique, vitesse, etc).

# Chapitre 5

## Caractéristiques microscopiques du choc de raréfaction

Nous allons dans ce chapitre illustrer la présence, sous certaines conditions (de température et de densité), d'un choc de raréfaction lors de l'expansion d'un plasma avec une fonction de distribution des électrons bi-Maxwellienne. Les différentes caractéristiques de celui-ci seront ensuite étudiées.

### 5.1 Choc de raréfaction : conditions nécessaires d'existence

On cherche ici les conditions sur les rapports en température  $\alpha$  et en densité  $y$  pour lesquelles l'hypothèse quasi-neutre d'un plasma en expansion n'est plus valable. Ces conditions ont été établies pour la première fois par Bezzerides *et al.* [21]. Nous allons présenter ici le calcul dans le détail.

Selon l'équation (4.20), l'hypothèse quasi-neutre est violée si seulement

$$\frac{1}{2} \frac{dc_s^2}{d\varphi} \leq -1 \quad (5.1)$$

Nous faisons remarquer que le terme à gauche de cette inégalité correspond au rapport entre les variations de l'énergie cinétique des ions et de l'énergie potentielle du plasma, dans le référentiel en mouvement des ions. En reportant l'expression de la vitesse du son (4.16) dans (5.1), cette condition devient :

$$\frac{c_{sh}^2}{2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1+y}{\alpha+y} \right) \leq -1 \quad (5.2)$$



Puis en développant la dérivée de cette équation on obtient :

$$\frac{c_{sh}^2}{2} \left[ \frac{\alpha + y}{(\alpha + y)^2} \frac{dy}{d\varphi} - \frac{1 + y}{(\alpha + y)^2} \frac{dy}{d\varphi} \right] \leq -1 \quad (5.3)$$

Par ailleurs, sachant que :

$$y(\varphi) = y_u \exp \left[ \frac{(1 - \alpha) \varphi}{c_{sh}^2} \right] \quad \text{soit} \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{(1 - \alpha)}{c_{sh}^2} y \quad (5.4)$$

on trouve en reportant (5.4) dans (5.3)

$$\frac{(\alpha - 1)^2}{2} \frac{y}{(\alpha + y)^2} \geq 1 \quad (5.5)$$

Après quelques simplifications, on trouve que la condition sur l'invalidité de l'hypothèse quasi-neutre, s'écrit sous la forme d'une inégalité du second degré en  $y$  :

$$2y^2 + (6\alpha - 1 - \alpha^2)y + 2\alpha^2 \leq 0 \quad (5.6)$$

La seule connaissance de  $\alpha$  permet de résoudre complètement cette inégalité.

### Résolution de l'équation 5.6

Pour résoudre cette inégalité (5.6), nous commençons d'abord par calculer son discriminant, soit :

$$\Delta = (6\alpha - 1 - \alpha^2)^2 - 16\alpha^2 \quad (5.7)$$

L'inégalité est satisfaite si :

$$\Delta \geq 0 \quad \text{et} \quad y_- \leq y \leq y_+ \quad (5.8)$$

avec

$$y_{\pm} = \frac{-(6\alpha - 1 - \alpha^2) \pm \sqrt{\Delta}}{4} \quad (5.9)$$

On cherche maintenant la valeur minimale de  $\alpha$  pour laquelle l'inégalité (5.8) est satisfaite, pour cela on impose  $\Delta = 0$ . La valeur obtenue (avec la contrainte  $\alpha \geq 1$ ) est  $\alpha_{cr} = 5 + \sqrt{24} \simeq 9.9$ . Le rapport en densité correspondant à cette valeur critique  $\alpha_{cr}$  est  $y_{cr} = 5 + \sqrt{24} \simeq 9.9$ .

Finalement, on peut réécrire les conditions sur les valeurs de  $\alpha$  et de  $y$  pour lesquelles l'hypothèse quasi-neutre d'un plasma d'électrons bi-Maxwellien n'est plus valable sous la forme :

$$\alpha \geq 5 + \sqrt{24} \quad (5.10)$$

$$y_- \leq y \leq y_+ \quad (5.11)$$

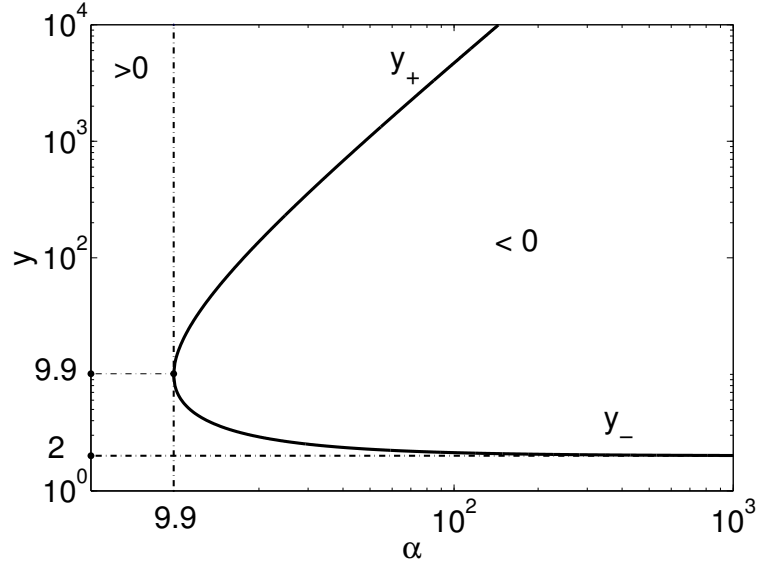
La figure 5.1 présente le domaine de validité de ces deux conditions, qui correspond à la région entourée par l'hyperbole ( $< 0$ ). Dans la limite  $\alpha \gg 1$ ,  $y_+ \rightarrow \alpha^2/2$  et  $y_- \rightarrow 2$ , ainsi l'inégalité (5.6) est vérifiée pour des rapports en densité contenus dans l'intervalle :

$$2 \leq y \leq \frac{\alpha^2}{2} \quad (5.12)$$

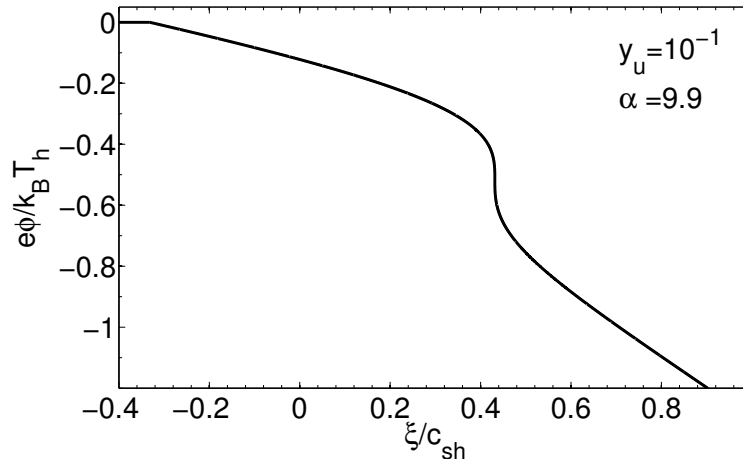
Pour obtenir le profil du potentiel électrique dans le cas limite  $\alpha = 5 + \sqrt{24}$ , on intègre numériquement la relation explicite (4.19)  $\xi$  comme une fonction  $\varphi$ . La figure 5.2 montre le résultat de ce calcul pour  $y_u = 10^{-1}$ , où nous avons tracé le potentiel électrostatique  $\phi$ , normalisé avec  $k_B T_h / e$ , en fonction de  $\xi$ . Remarquons d'abord que l'on observe clairement les régions d'expansion des électrons froids et des électrons chauds. Comme on l'a montré auparavant, pour  $\alpha = 9.9$  la valeur de  $y$  pour laquelle l'égalité (5.6) est satisfaite est  $y = 9.9$ . En ce point, la dérivée  $d\xi/d\phi$  s'annule.

L'occurrence de la discontinuité dans le plasma se produit dès lors que  $y_u$  est plus petit que  $y_+$ , et ceci même si  $y_u < y_-$ , car  $y$  croît toujours avec  $\xi$  et finit toujours par franchir la frontière  $y = y_-$ .

Dans la suite,  $\alpha$  est choisi de sorte que le choc de raréfaction soit susceptible d'apparaître dans le plasma, c'est-à-dire  $\alpha \geq 9.9$ .



**FIGURE 5.1** – Courbe du rapport en densité du plasma  $y(\phi)$  en fonction de  $\alpha$ . La région entourée par l'hyperbole ( $< 0$ ) correspond aux solutions de l'équation (5.6).



**FIGURE 5.2** – Profil spatial du potentiel électrique du plasma en fonction de la variable auto-similaire  $\xi$  calculé avec la formule (4.19).

## 5.2 Résolution de l'Hugoniot du choc

Nous avons vu que le modèle d'expansion quasi-neutre ne permet pas de construire la solution physique de l'expansion pour des plasmas avec un rapport en température  $\alpha \geq 9.9$ . En effet, dans l'hypothèse quasi-neutre, ce modèle fournit des solutions multivaluées à cause de l'apparition d'une discontinuité dans le plasma. Nous présentons un modèle analytique permettant de construire complètement la structure de l'expansion. Les résultats de ce modèle seront ensuite comparés au modèle de plasma quasi-neutre.

D'abord nous allons résoudre l'équation d'Hugoniot du choc afin de déterminer l'amplitude du saut en potentiel et la valeur du rapport en densité des électrons  $y_0$  en amont du choc. Il est commode d'introduire les quantités liées à l'écoulement par :

$$w = e(\phi_0 - \phi_1)/k_B T_h, \quad n_{h0} = n_h(\phi_0), \quad n_{c0} = n_c(\phi_0), \quad \text{et} \quad y_0 = n_{h0}/n_{c0}$$

de sorte que la densité et la pression des électrons en amont du choc s'écrivent :

$$\begin{aligned} n_0 &= n_{h0} + n_{c0} = n_{c0} (y_0 + 1) \\ P_0 &= n_{h0} T_h + n_{c0} T_c = n_{c0} T_h (y_0 + \frac{1}{\alpha}) \end{aligned}$$

En aval du choc elles s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} n_1 &= n_{h0} e^{-w} + n_{c0} e^{-\alpha w} = n_{c0} (y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}) \\ P_1 &= n_{h0} T_h e^{-w} + n_{c0} T_c e^{-\alpha w} = n_{c0} T_h (y_0 e^{-w} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha w}) \end{aligned}$$

On reporte ensuite ces résultats dans l'équation d'Hugoniot (4.31), on obtient alors l'expression de l'amplitude du choc :

$$w = \frac{1}{2} \left[ y_0 (1 - e^{-w}) + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha w}) \right] \left( \frac{1}{y_0 + 1} + \frac{1}{y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}} \right) \quad (5.13)$$

En procédant de même pour l'équation de conservation de l'énergie et celle du flux de particules au travers du choc de raréfaction, on obtient les expressions pour les vitesses de l'écoulement en amont et en aval du choc :

$$u_0 = c_{sh} \left[ \frac{2w}{\left( \frac{y_0 + 1}{y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}} \right)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (5.14)$$

$$u_1 = c_{sh} \left( \frac{u_0^2}{c_{sh}^2} + 2w \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

La résolution de l'équation (5.13) n'est pas aisée vu que pour  $\alpha$  donné, nous avons deux inconnues à savoir  $w$  et  $y_0$ . Voici comment nous procédons pour résoudre ce problème. D'abord, pour  $w$  donné ( $> 0$ , c'est-à-dire pour un choc de raréfaction), on réécrit (5.13) sous la forme d'une équation du second degré en  $y_0$  :

$$Ay_0^2 + By_0 + C = 0 \quad (5.16)$$

avec

$$\begin{aligned} A(w) &= 2w e^{-w} + e^{-2w} - 1 \\ B(w, \alpha) &= 2w (e^{-w} + e^{-\alpha w}) - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha w}) (e^{-w} + 1) - (1 - e^{-w})(1 + e^{-\alpha w}) \\ C(w, \alpha) &= 2w e^{-\alpha w} - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha w}) \end{aligned}$$

Pour  $\alpha$  fixé, on résout numériquement cette équation du second degré en faisant varier  $w$ . Une infinité de solutions positives  $y_0$  peuvent être obtenues pourvu que la valeur du saut en potentiel  $w$  ne soit pas trop large (dans nos simulations, nous avons fait varier  $w$  de 0 à 2). Ensuite, on utilise la contrainte (4.47) sur la nature de l'écoulement au point amont du choc. En effet, la position amont de la discontinuité doit correspondre à la solution de l'équation d'Hugoniot, donc sa vitesse est donnée par  $u_0$ . En second lieu, ce point appartient, si elle existe (on verra que cela dépend de  $y_u$ ), à la région d'expansion dominée par les électrons froids, donc il a également pour vitesse  $v_0 = \xi_s + c_{s0}$ . Par conséquent, au point amont nous avons  $u_0 = c_{s0}$ . En combinant les équations (4.16) et (5.14), on obtient une expression reliant la valeur du saut en potentiel  $w$  et celle du rapport en densité  $y_0$  sous la forme :

$$\frac{1 + y_0}{\alpha + y_0} = \frac{2w}{\left( \frac{1+y_0}{y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}} \right)^2 - 1} \quad (5.17)$$

Concrètement, on détermine numériquement les valeurs de  $y_0$ ,  $w$ ,  $u_1$ ,  $u_0$ , etc. en cherchant le point où la valeur de la différence ( $u_0 - c_{s0}$ ) est nulle.

### Comment construire la structure de l'écoulement ?

La construction de la solution physique de l'expansion du plasma nécessite, outre la connaissance au préalable de la valeur du saut en potentiel du choc  $w$ , du rapport en densité  $y_0$ , des vitesses de l'écoulement en amont  $u_0$  et en aval du choc  $u_1$ , de la vitesse du son en aval du choc  $c_{s1}$ , le calcul d'un certain nombre de paramètres de l'expansion à savoir :  $\phi_0$ ,  $\xi_r$ ,  $\xi_s$ , et  $\xi_{r2}$  (ces grandeurs sont identifiées sur la figure 5.3). Il convient de noter sur cette figure 5.3 la différence entre l'onde de raréfaction, qui se propage toujours vers le plasma non perturbé à la vitesse du son, et le choc de raréfaction qui se déplace sous la forme d'une discontinuité soit vers le plasma non perturbé soit vers la région du vide.

La méthode utilisée pour construire le profil du potentiel électrique  $\phi$  du plasma se déroule de façon suivante :

1. on calcule la position de l'onde de raréfaction avec

$$\xi_r = -c_s(y_u) = -\sqrt{(1 + y_u)/(\alpha + y_u)} \quad (5.18)$$

celle-ci est donc déterminée grâce aux paramètres de la région non-perturbée du plasma  $\alpha$  et  $y_u$ . En outre, l'onde de raréfaction se connecte directement au plasma non perturbé.

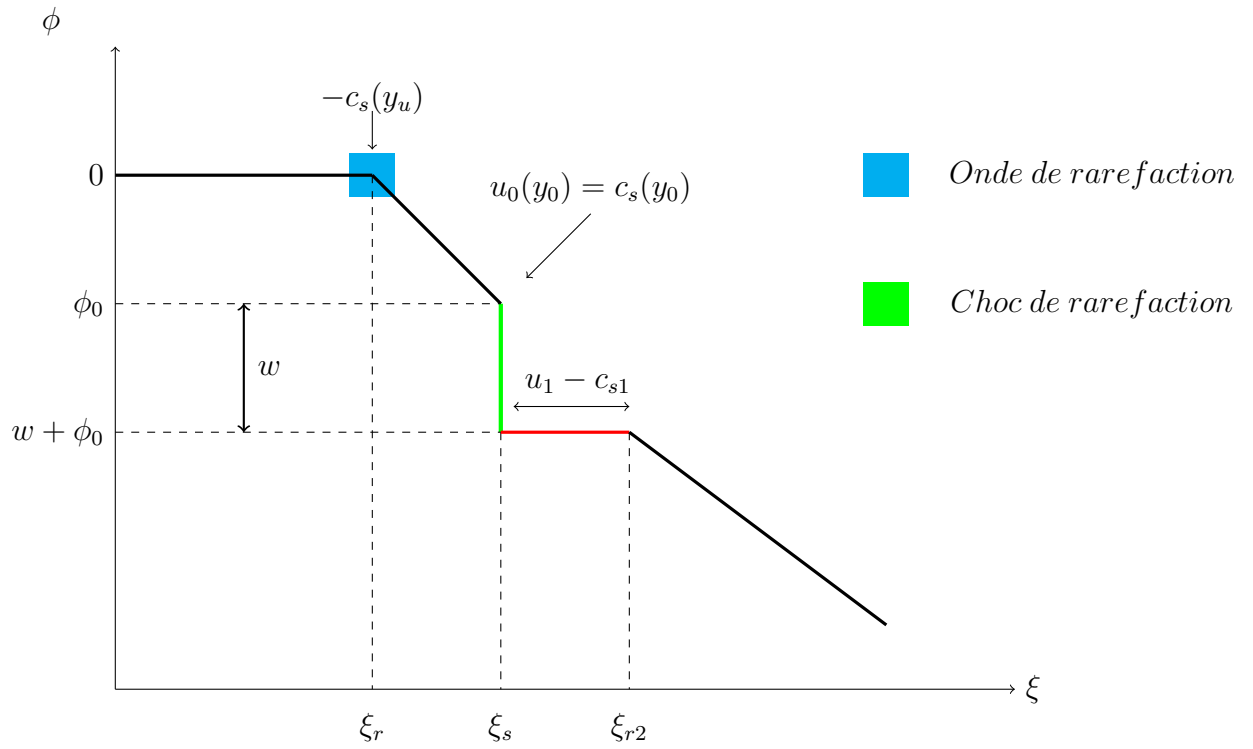
2. on détermine la région d'expansion dominée par les électrons froids. C'est une courbe reliant l'onde de raréfaction à la position amont du choc. Il suffit donc de connaître la valeur du potentiel  $\phi_0 = \phi(y_0)$  et la position  $\xi_s$  du choc pour pouvoir tracer cette région. On calcule  $\phi_0$  à partir de la relation suivante :

$$\phi_0 = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \left( \frac{y_0}{y_u} \right) \quad (5.19)$$

Ensuite, la position du choc de raréfaction  $\xi_s$  est obtenue en intégrant numériquement (4.12) de  $\phi = 0$  à  $\phi_0$ . On trace finalement la courbe reliant l'onde de raréfaction située en  $A(\xi_r, 0)$  et la position amont du choc de raréfaction située en  $B(\xi_s, \phi_0)$ . Pour  $y_u \geq y_0$ , la position amont du choc coïncide avec celle de l'onde de raréfaction  $\xi_r = \xi_s$ , et la région d'expansion des électrons froids disparaît.

3. on trace le saut en potentiel du choc d'amplitude  $w$ , sachant que la position amont du choc est directement reliée à la région d'expansion des électrons froids.
4. on trace le plateau reliant la position aval du choc de raréfaction à une nouvelle onde de raréfaction située à  $\xi_{r2} = \xi_s + (u_1 - c_{s1})$ .
5. il nous reste à construire la région d'expansion dominée par les électrons chauds. C'est la courbe partant de la position de la nouvelle onde de raréfaction  $\xi_{r2}$  et parallèle à la droite obtenue en intégrant (4.19) avec  $\xi$  comme une fonction de  $\phi(\xi)$ .

Par analogie, on peut également reconstituer les profils spatiaux de la densité, et de la vitesse des ions du plasma.



**FIGURE 5.3** – Méthode de construction de la structure de l'écoulement du plasma.

## 5.3 Étude des différents régimes d'expansion

Dans la section suivante, nous allons étudier plus en détail le choc de raréfaction et la structure de l'écoulement en fonction des paramètres du plasma  $\alpha$  et  $y_u$ . La valeur initiale du rapport en densité dans le plasma  $y_u$  conditionne la nature du régime d'expansion obtenu, ainsi les différents régimes d'écoulement seront évoqués :  $y_u \gg 1$ ,  $y_u \ll 1$  et  $y_u \simeq 10^{-1} - 10^1$ . Dans ce qui suit, sauf indication contraire,  $\alpha$  est pris très grand,  $\alpha \gg 1$ .

### 5.3.1 Régime d'expansion standard

On considère des plasmas dans lesquels les électrons chauds sont très minoritaires devant les électrons froids, c'est à dire que  $y_u = n_{hu}/n_{cu} \ll 1$ . On désigne ce régime d'expansion par le terme de « standard » ; ces plasmas sont similaires à ceux obtenus lors de l'interaction d'impulsions lasers très intenses avec la matière.

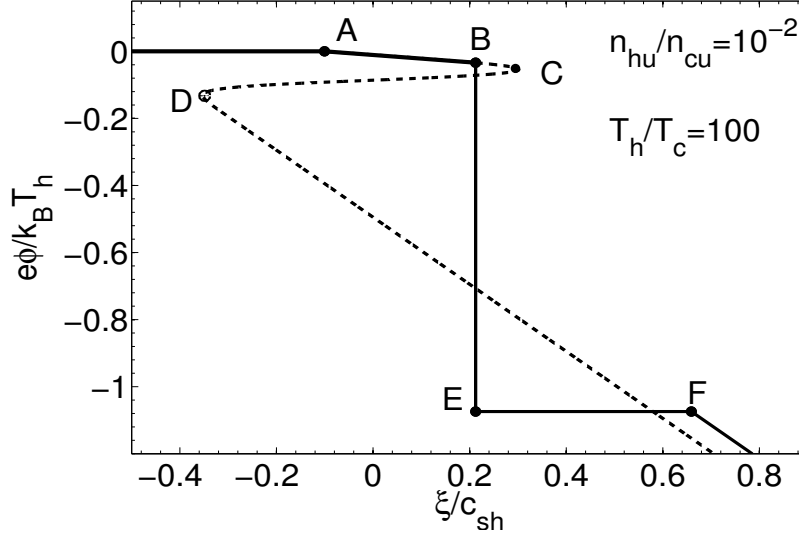
La figure 5.4 montre le profil spatial du potentiel électrique (courbe en pointillés) obtenu en intégrant Eq. (4.19), pour les paramètres plasma suivants  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . A titre de comparaison, la solution physique (courbe en trait plein) obtenue en résolvant l'Hugoniot du choc (5.13) y est également représentée.

Les régions suivantes peuvent être identifiées sur la figure 5.4 : la région non-perturbée du plasma à gauche de l'onde de raréfaction située en  $A$ , une région d'expansion dominée par les électrons froids entre  $A$  et  $B$ , le choc de raréfaction joignant les points  $B$  et  $E$ , un plateau entre  $E$  et  $F$ , et enfin une région d'expansion dominée par les électrons chauds à droite de  $F$ . Par ailleurs, on voit que la portion de la courbe comprise entre les positions  $C$  et  $D$  correspond aux valeurs du potentiel  $\varphi$  pour lesquelles l'inégalité (4.20) est satisfaite.

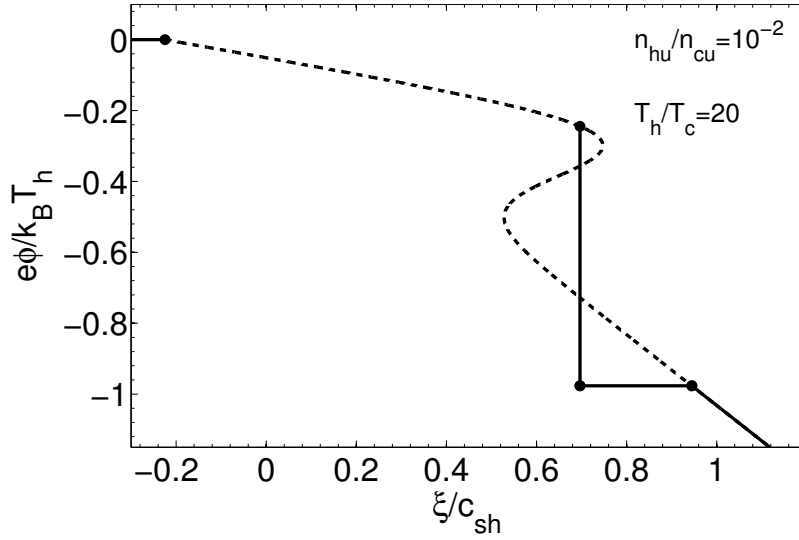
Une deuxième onde de raréfaction relie la région d'expansion des électrons chauds à l'écoulement. Sachant que l'onde de raréfaction se déplace à la vitesse du son en aval de la discontinuité, il apparaît alors au cours l'écoulement un plateau de longueur  $(u_1 - c_{s1})$ . On se rend compte ici que les configurations des figures 5.3(d) et 5.3(c), même si elles sont permises d'un point de vue purement analytique, ne peuvent en réalité être observées. Les valeurs numériques des différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement, correspondant à la figure 5.4, sont consignées dans le tableau 5.1, pour  $\alpha = 10^2$ .

Pour un rapport en température plus faible,  $\alpha = 20$ , on observe une nette réduction de la valeur de l'amplitude du saut en potentiel du choc et de la longueur du plateau. Cette diminution est illustrée sur la figure 5.5 pour  $y_u = 10^{-1}$ .





**FIGURE 5.4** – Potentiel électrique en fonction de  $\xi$  pour  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . La courbe en pointillés est la solution obtenue en intégrant l'équation (4.19). La courbe en trait plein est la solution physique calculée avec (5.13).

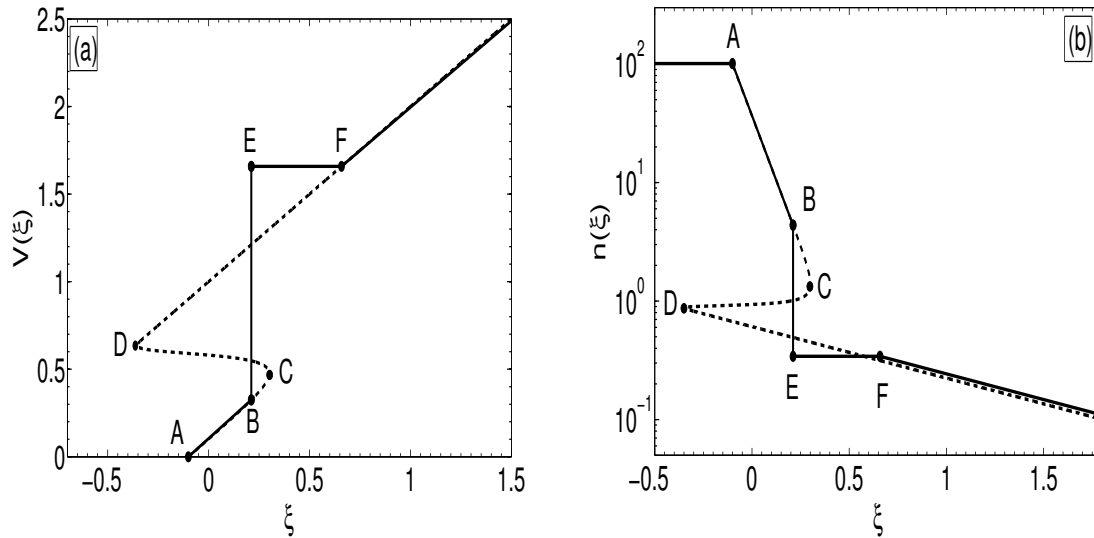


**FIGURE 5.5** – Similaire à la figure 5.4 pour les paramètres plasma suivants :  $\alpha = 20$  et  $y_u = 10^{-2}$ .

Plasma : $\alpha = 10^2$	estimation
$w$	1.04034
$y_B = y_0$	0.28443
$\xi_s$	0.21136
$u_0(y_0) = c_{s0}(y_0)$	0.11321
$u_1$	1.44689

**TABLE 5.1** – Valeurs numériques des grandeurs caractéristiques du choc de raréfaction pour  $\alpha = 10^2$ . Les vitesses  $u_0$ ,  $u_1$  et  $\xi_s$  sont normalisées à  $c_{sh}$ .

Par ailleurs, il convient de noter que contrairement à ce que Wickens et Allen [40] estiment dans leur article, la discontinuité ne coïncide pas avec le premier point singulier qui apparaît sur la solution multivaluée. Cette discontinuité devrait selon leur étude se produire au point  $C$  sur la figure 5.4. En réalité, elle apparaît bien avant que l'écoulement n'ait eu le temps d'atteindre le point  $C$ . Une expression analytique approchée de la position du choc de raréfaction sera établie un peu plus loin dans cette section. Enfin, la figure 5.6 montre les profils spatiaux de la vitesse l'écoulement et de la densité des ions pour les paramètres plasma identiques à ceux de la figure 5.4.



**FIGURE 5.6** – Profils spatiaux de la vitesse (a) et de la densité (b) des ions pour des paramètres plasma identiques à ceux de la figure 5.4.

## Structure détaillée du choc de raréfaction

Pour  $\alpha$  donné on résout numériquement la relation 5.16, en faisant varier  $w$ , afin de déterminer la valeur du rapport en densité  $y_0$  en amont du choc. On peut donc calculer en se servant des équations (5.14), (5.15) et (4.16), les vitesses de l'écoulement et de l'onde de raréfaction en amont et en aval de la discontinuité, pour chaque valeur de  $y_0$ .

La figure 5.7 présente les résultats obtenus, en termes de vitesses de l'écoulement et du son en fonction de  $y_0$  pour un rapport en température  $\alpha = 10^2$  (les paramètres plasma sont identiques à ceux de la figure 5.4). Les vitesses de l'écoulement en amont  $u_0$  et en aval du choc  $u_1$  sont illustrées en ligne continue. Les points-tirets correspondent aux vitesses du son en amont  $c_{s0}$  et en aval du choc  $c_{s1}$ . Enfin, les solutions de l'écoulement pour lesquelles  $u_0 < c_{s0}$ , celles qui correspondraient à un plateau dans la région en amont du choc et qui du coup invalideraient la contrainte (4.47), sur la nature sonique de l'écoulement au point  $B$ , sont représentées en tirets rouges. Elles ne se rapportent pas à des solutions physiques de l'expansion. On distingue les trois régimes d'expansion suivants. Si  $y_0 \geq y_B$ , le choc de raréfaction se déplace au travers du plasma à la vitesse du son  $u_0 = c_s$ ; cet écoulement correspond au régime standard. Si  $y_B < y_0 < y_D$ , il apparaît un choc de raréfaction dans le plasma, et celui-ci se déplace à l'intérieur de ce dernier à une vitesse supersonique  $u_0 > c_{s0}$ ; c'est le régime supersonique, il sera discuté plus tard. Enfin, si  $y_0 \geq y_D$ , nous avons  $u_1 = u_0 = c_s$  par conséquent le choc de raréfaction disparaît du plasma; on a uniquement une raréfaction des électrons chauds. Par ailleurs, on observe que la vitesse du son en aval du choc  $c_{s1}$  ne varie pas avec  $y_0$ ; elle vaut  $c_{s1} \simeq c_{sh}$  au cours de l'expansion.

Les diagrammes  $(P, V_e)$  et  $(P, V)$ <sup>1</sup> sont représentés sur la figure 5.8 pour  $\alpha = 10^2$ . Pour tracer ces courbes, nous avons utilisé les relations suivantes :

$$P(\phi) = n_{c0} T_{c0} [e^{\alpha(\phi-\phi_0)} + \alpha y_0 e^{\phi-\phi_0}] \quad (5.20)$$

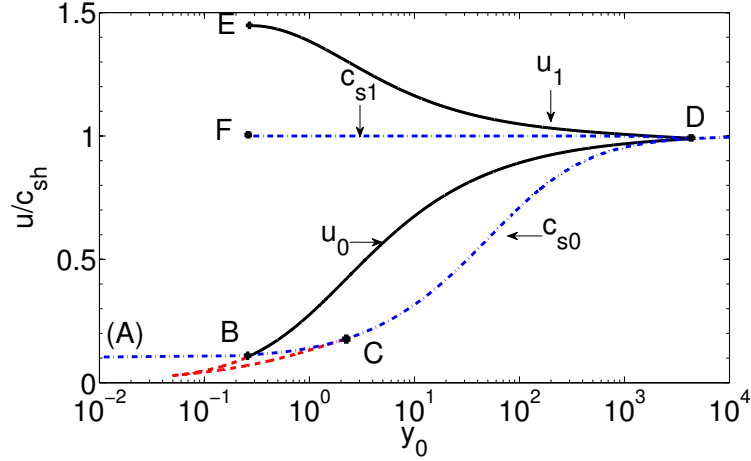
$$n_e(\phi) = n_{c0} [e^{\alpha(\phi-\phi_0)} + y_0 e^{\phi-\phi_0}] = \frac{1}{V_e} \quad (5.21)$$

$$n(\phi) = n_{c0} \frac{(1 + y_0)}{\sqrt{1 - 2(\phi - \phi_0)/u_0^2}} = \frac{1}{V} \quad (5.22)$$

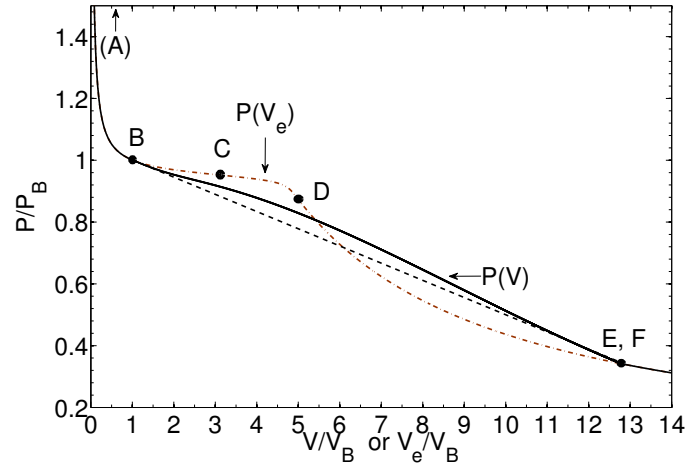
où  $\phi$  et  $\phi_0$  sont normalisés à  $k_B T_h / e$ . D'abord, on remarque que la courbe de  $P(V_e)$  est concave entre les points  $B$  et  $D$ ; une propriété caractéristique des fluides avec des propriétés thermodynamique anormales. Celle-ci témoigne de la présence d'un choc de raréfaction dans le plasma. Les points  $A-F$  indiqués dans l'expansion du plasma sur la figure 5.4 y sont également représentés. Les deux courbes coïncident à gauche du point  $B$  et à droite des points  $E$  et  $F$  où l'écoulement est quasi-neutre. La courbe en tirets-pointillés est une droite reliant les points  $B$  et  $E$ , correspondant à l'équation suivante :

$$nu^2 + \frac{P}{m} = n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m}, \quad (5.23)$$

1. Les volumes spécifiques sont définis par :  $V_e = 1/n_e$  et  $V = 1/n$



**FIGURE 5.7** – Vitesse de l'écoulement des ions en fonction du rapport en densité des électrons en amont du choc  $y_0$  pour  $\alpha = 10^2$ . Le trait et les pontillés-tirés bleus représentent la vitesse du son en amont  $c_{s0}$  et en aval  $c_{s1}$  du choc. Les lignes continues noires sont les vitesses de l'écoulement amont  $u_0$  et aval  $u_1$  du choc. Les trait-tirés rouges correspondent aux valeurs de  $u_0$  pour lesquelles la contrainte (4.47) n'est pas satisfaite.



**FIGURE 5.8** – Pression des électrons en fonction des volumes spécifiques des électrons  $V_e = 1/n_e$  (points-tirés rouges) et des ions  $V = 1/n$  (ligne continue), pour  $\alpha = 10^2$ . Les points A-F identifiés sur la figure 5.4(a) y sont également représentés. La ligne droite (en tirets) reliant B et E se rapporte à l'équation (5.23). Les volumes spécifiques  $V_e$  et  $V$ , et la pression  $P$  sont normalisés à leurs valeurs respectives au point amont du choc (i.e.,  $P_B$  et  $V_B$ ).

avec  $nu = n_0 u_0$ . La différence entre la courbe  $P(V)$  et la droite passant par les points  $B$  et  $F$  (que l'on désigne par (BE) dans la suite de la discussion), est proportionnelle à la densité d'énergie électrostatique à l'intérieur du choc [voir Eq. (4.27)]. Les courbes  $P(V)$ ,  $P(V_e)$  et la droite (BE) sont tangentes au point  $B$ . L'explication vient d'une part, du fait que les vitesses du son  $c_s$  et  $c_{si}$ <sup>2</sup> coïncident en ce point (par suite de la neutralité du plasma), et d'autre part, du caractère sonique de l'écoulement en amont du choc. De plus, à gauche du point  $E$ , la tangente à la courbe  $P(V)$  coïncide avec la droite (BE) à cause de l'égalité entre la vitesse du son  $c_{si}$  et la vitesse de l'écoulement en aval du choc  $u_1$ . Pour la démontrer, on différencie les relations (5.23) et (4.21). On obtient :

$$u^2 dn + 2n u du + \frac{dP}{m} = 0 \quad (5.24)$$

$$u dn + n du = 0 \quad (5.25)$$

La combinaison de ces deux équations confirme l'analyse précédente,

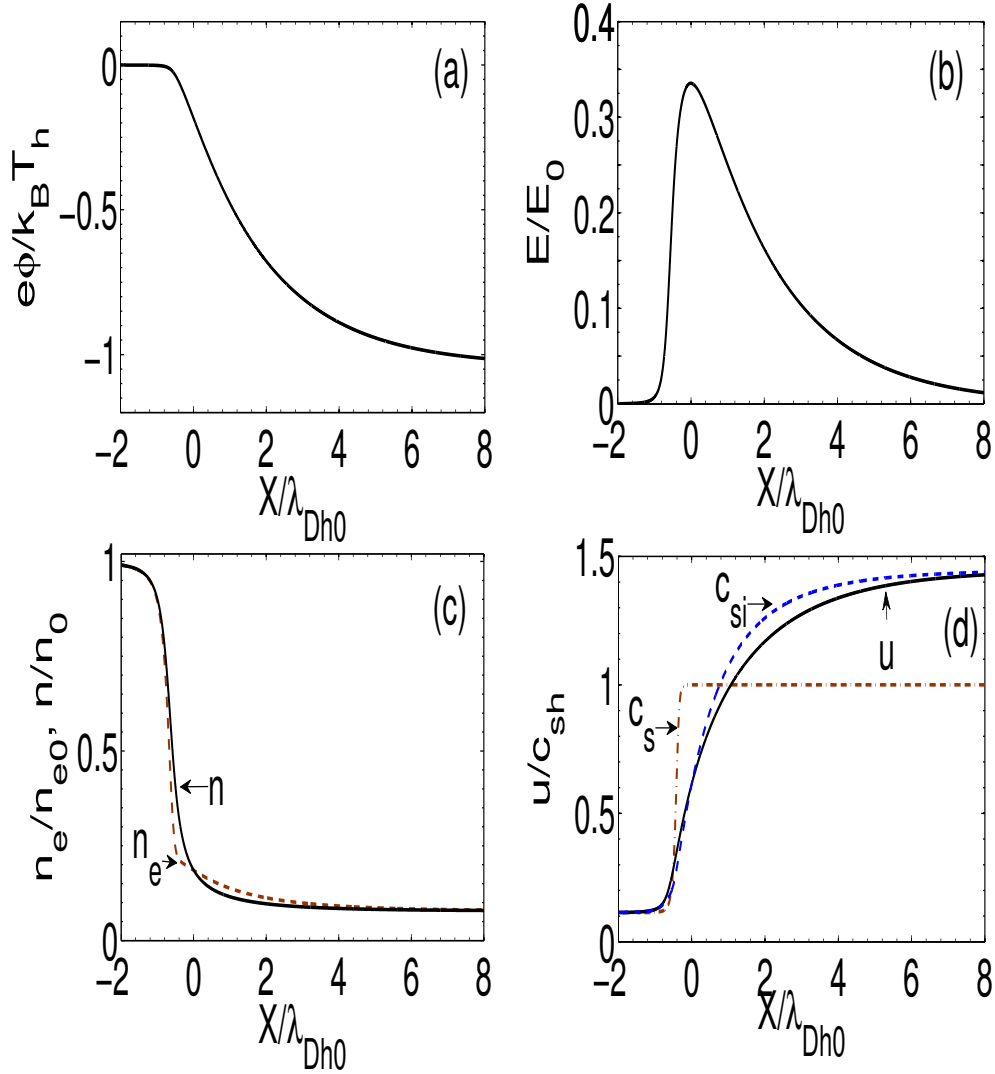
$$\frac{1}{m} \frac{dP}{dn} = u^2 = c_{si}^2 \quad (5.26)$$

Par ailleurs, la tangente à la courbe  $P(V)$  au point  $E$  diffère de celle à la courbe  $P(V_e)$ . D'abord, les deux vitesses du son  $c_s$  et  $c_{si}$  ne sont pas les mêmes à gauche du point  $E$ , du fait de la non quasi-neutralité du plasma dans cette région. De plus, l'écoulement est supersonique en amont du choc,  $u_1 > c_s$ . Si on considère maintenant la courbe  $P(V)$  des deux cotés du point  $E$ , on observe que sa dérivée n'est pas continue. Par conséquent, la vitesse du son  $c_{si}$  est également discontinue en ce point. Ainsi, deux caractéristiques ( $C_-$ ), partant du point  $E$ , avec des pentes différentes aboutissent à la formation d'un plateau dans la structure de l'expansion. La longueur du plateau est donnée par  $\Delta c_{si} t$ , où  $\Delta c_{si} = c_{si} - c_s$  est la différence entre les deux vitesses du son.

Nous voulons déterminer le potentiel électrique, le champ électrique, les densités ioniques et électroniques à l'intérieur du choc de raréfaction. Disposant de la valeur de  $y_0$  et celle de  $u_0$ , nous résolvons numériquement l'équation (4.35) avec la méthode des différences finies. Le potentiel électrique  $\phi$  et le champ  $E = -\partial\phi/\partial x$ , obtenus avec ces calculs, sont représentés sur les figures 5.9 (a) et (b) en fonction de  $X \simeq x - \xi_s t$  pour  $\alpha = 10^2$ . La coordonnée d'espace est normalisée à  $\lambda_{Dh0} = (\epsilon_0 k_B T_h / n_{h0} e^2)^{1/2}$ . La position  $X = 0$  a été arbitrairement assignée à la position de l'espace correspondant au pic du champ électrique. Le choc de raréfaction apparaît clairement sur le profil du potentiel. La discontinuité n'est pas raide du fait des effets de la longueur de Debye des électrons. La figure 5.9 (c) montre les profils des ions et des électrons à l'intérieur du choc de raréfaction en fonction de  $X$ . On voit que la séparation de charges se produit à l'intérieur du choc mais s'annule à la position  $X = 0$  correspondant au maximum du champ électrique, puis se manifeste à nouveau au delà de ce point. Enfin, les profils de la vitesse de l'écoulement et du son sont illustrés sur la figure 5.9 (d). On observe que l'écoulement du plasma qui est sonique en amont du choc devient successivement supersonique, subsonique, et sonique (ici on se réfère au rapport de la vitesse de l'écoulement  $u$  à la vitesse du son  $c_s$ ).

---

2. Les vitesses du son sont définies par :  $c_s \propto \frac{dP}{dV_e}$  et  $c_{si} \propto \frac{dP}{dV}$ .



**FIGURE 5.9** – Profils spatiaux (a) du potentiel, (b) du champ électrique, (c) de la densité des ions et des électrons, des vitesses du son  $c_{si}$  (en tirets) et  $c_s$  (en points-tirets), de la vitesse de l'écoulement en aval du choc  $u$  (ligne continue), à l'intérieur de l'onde de raréfaction en fonction de  $X$  pour  $\alpha = 10^2$ . Le champ électrique est normalisée à  $E_0 = (n_{h0}k_B T_h/\epsilon_0)^{1/2}$ . La variable spatiale  $X \simeq x - \xi_s t$  est normalisée à  $\lambda_{Dh0} = (\epsilon_0 k_B T_h/n_{h0}e^2)^{1/2}$ . La position  $X = 0$  correspond au maximum du champ électrique.

## Expressions asymptotiques

On propose ici de calculer les expressions asymptotiques des différentes grandeurs caractéristiques de la structure du plasma en expansion. On commence d'abord par estimer le saut en potentiel  $w$  et le rapport en densité des électrons en amont du choc de raréfaction  $y_0$ , pour un  $\alpha$  donné. On définit un paramètre physique  $\epsilon = 1/\sqrt{\alpha}$  très petit  $\epsilon \ll 1$ , pour les rapports de températures  $\alpha \gg 1$ . On procède à un développement de Taylor de  $w$  et  $y$  en puissance de  $\epsilon$  sous la forme<sup>3</sup> :

$$w = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots \quad (5.28)$$

$$y_0 = \epsilon y_{01} + \epsilon^2 y_{02} + \dots \quad (5.29)$$

On introduit  $y_0$  dans l'équation dans (5.13)

$$w = \frac{1}{2} [(\epsilon y_{01} + \epsilon^2 y_{02})(1 - e^w) + \epsilon^2] \left[ 1 - \epsilon y_{01} - \epsilon^2 y_{02} + \frac{e^w}{\epsilon y_{01}} \left( 1 - \epsilon \frac{y_{02}}{y_{01}} \right) \right] \quad (5.30)$$

où on a négligé les termes en  $e^{-\alpha w}$ . On développe cette relation puis regroupe les termes en puissances de  $\epsilon$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} w = e^w - 1 &+ \epsilon \left[ \left( 1 - \frac{e^w}{y_{02}} \right) (1 - e^{-w}) y_{01} + \frac{e^w}{y_{01}} (1 + y_{02} - y_{02} e^{-w}) \right] \\ &+ \epsilon^2 \left[ \left( 1 - \frac{e^w}{y_{02}} \right) (1 + y_{02} - e^{-w} y_{02}) - y_{01}^2 + y_{01}^2 e^{-w} \right] + \dots \quad (5.31) \end{aligned}$$

On procède maintenant, à la seconde phase du développement. Pour cela, on introduit l'expression du saut en potentiel  $w$  dans (5.31). On trouve, après quelques simplifications,

$$\begin{aligned} w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 = & e^{-w_0} - 1 \\ &+ \epsilon \left[ \left( 1 - \frac{e^{w_0}}{y_{02}} \right) (1 - e^{-w_0}) y_{01} + \frac{e^{w_0}}{y_{01}} (1 + y_{02} - y_{02} e^{-w_0} + w_1 e^{w_0}) \right] \\ &+ \epsilon^2 \left[ \left( 1 - \frac{e^{w_0}}{y_{02}} \right) (1 + y_{02} - e^{-w_0} y_{02}) - y_{01}^2 + y_{01}^2 e^{-w_0} \right] + \dots \quad (5.32) \end{aligned}$$

3. Si on remplace  $\epsilon$  dans (5.13), nous obtenons

$$w = \frac{1}{2} [y_0(1 - e^{-w}) + \epsilon^2] \left( \frac{1}{y_0 + 1} + \frac{1}{y_0 e^{-w}} \right) \quad (5.27)$$

Ce qui montre que le développement de  $w$  en puissance de  $\epsilon$  a nécessairement la forme :  $w = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots$ , avec  $w_0$  la solution de l'équation  $2w_0 = e^{w_0} - 1$ . Par analogie, on peut appliquer le même raisonnement à  $y_0$ .

D'autre part, en appliquant la même procédure à l'équation (5.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 = & y_{01}^{-2} e^{2w_0} \\
& + \epsilon \left( 3y_{01} - \frac{2y_{02}}{y_{01}} + 2w_1 \right) y_{01}^{-2} e^{2w_0} \\
& + \epsilon^2 \left[ -4y_{02} + 3y_{01}^2 + 6w_1(y_{01}^2 - y_{02}) \right] y_{01}^{-2} e^{2w_0} \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Il ne reste maintenant qu'à résoudre successivement ces deux équations pour déterminer les valeurs du développement limité de  $w$  et de  $y$ . Si on ne garde que les termes d'ordre 0 en  $\epsilon$  de l'équation (5.32), on trouve :

$$w_0 = \frac{1}{2} (e^{w_0} - 1) \quad (5.34)$$

On reporte ce résultat dans l'équation (5.33). On obtient à l'ordre 1 en  $\epsilon$  :

$$y_{01} = \frac{e^{w_0}}{\sqrt{2w_0}} \quad (5.35)$$

En répétant le même raisonnement, on obtient ainsi :

$$w_1 = \frac{\sqrt{8w_0}}{1 - 2w_0} \quad (5.36)$$

et

$$y_{02} = \frac{3}{4} \frac{e^{2w_0}}{w_0} - \frac{e^{w_0}}{w_0} \quad (5.37)$$

La seule connaissance de  $w_0$ , permet de déterminer toutes les expressions asymptotiques pour les quantités caractérisant l'expansion du plasma. Pour cela, on doit résoudre l'équation transcendante (5.34). Celle-ci est faite grâce à l'utilisation d'un algorithme basé sur la méthode de la bisection. On obtient alors la valeur numérique de l'amplitude du choc,  $w \simeq 1.25$ .

De façon générale pour  $\alpha \gg 1$ , le rapport en densité en amont du choc  $y_0$  et le saut en potentiel du choc  $w$  s'écrivent sous la forme :

$$w \simeq 1.26 - \frac{2.10}{\sqrt{\alpha}} + \dots \quad (5.38)$$

$$y_0 \simeq \frac{2.22}{\sqrt{\alpha}} + \frac{4.57}{\alpha} + \dots \quad (5.39)$$

où on a gardé uniquement les deux premiers termes de chaque développement. Le résultat (5.38) coïncide avec le résultat obtenu par Tikhonchuk *et al.* [26].



Le rapport de la densité en aval du choc est très grand, et il s'écrit :

$$y_1 = y_u \exp [(1 - \alpha) \phi_1] \simeq y_0 e^{\alpha w} \quad (5.40)$$

Nous proposons d'établir les expressions analytiques des différentes positions et des valeurs des rapports en densités correspondant à ces points (i.e, des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $F$  sur la figure 5.4). D'abord, la vitesse du son dans le plasma, dans la limite  $\epsilon \ll 1$ , est donnée par :

$$c_s \simeq \left(1 + \frac{y}{2}\right) \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.41)$$

Sachant que l'onde de raréfaction se déplace au travers du plasma non perturbé à la vitesse du son  $c_s(y_u)$  et est située en  $A$ , sa position est donnée par :

$$\xi_A \simeq - \left(1 + \frac{y_u}{2}\right) \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.42)$$

Le rapport de la densité au point  $B$ , position amont du choc de raréfaction, est obtenu en utilisant la contrainte sur la nature sonique de l'écoulement à ce point, donc  $y_B = y_0$ . Pour calculer la position  $\xi_s$  du choc, on réécrit la relation (4.12) sous la forme :

$$\frac{d\xi}{dy} = -\frac{1}{c_s} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dc_s}{dy} \quad (5.43)$$

puis utilisant la relation  $dy/d\varphi \simeq -\alpha y/c_{sh}^2$ , elle se réduit à :

$$\frac{d\xi}{dy} \simeq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{y} \frac{c_{sh}^2}{c_s} - \frac{dc_s}{dy} \quad (5.44)$$

On introduit maintenant (5.41) dans (5.44)

$$\frac{d\xi}{dy} \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{c_{sh}}{(1 + y/2)y} - \frac{c_{sh}}{2\sqrt{\alpha}} \quad (5.45)$$

Pour finir, on intègre (5.45) de la position de l'onde de raréfaction  $\xi_A(y_u)$  à la position du choc de raréfaction  $\xi_s(y_0)$ . Nous obtenons alors :

$$\xi_s - \xi_A \simeq \left[ \ln \left( \frac{y_0}{y_u} \right) - \ln \left( \frac{1 + y_0/2}{1 + y_u/2} \right) - \frac{y_0 - y_u}{2} \right] \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.46)$$

ou encore, en utilisant (5.42), à :

$$\xi_s \simeq \left[ \ln \left( \frac{y_0}{y_u} \right) + \frac{y_u}{2} - y_0 - 1 \right] \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.47)$$

Notons que  $y_1 = y_E = y_F$ , où les points  $E$  et  $F$  se situent sur le plateau (voir figure 5.4), et  $\xi_s = \xi_E$ .

La vitesse de l'écoulement en amont du choc  $u_0$  coïncide avec la vitesse du son au point  $B$ , c'est-à-dire, à  $c_s(y_0)$ . En utilisant (5.41), on trouve

$$u_0 \simeq \left(1 + \frac{1.11}{\sqrt{\alpha}}\right) \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.48)$$

On reporte ce résultat dans l'équation de conservation de l'énergie au travers du choc (5.15). Ensuite, en ne gardant que les deux premiers termes du développement, on obtient une estimation de la vitesse de l'écoulement en aval du choc  $u_1$  :

$$u_1 \simeq \left(1.59 - \frac{1.32}{\sqrt{\alpha}}\right) c_{sh} \quad (5.49)$$

Le point  $F$ , position de l'onde de raréfaction de la région d'expansion dominée par les électrons chauds, est située à l'extrémité droite du plateau. Elle est obtenue en additionnant la largeur du plateau ( $u_1 - c_{s1}$ ) à la position du choc de raréfaction  $\xi_s$ , soit :

$$\xi_F \simeq \xi_s + \left(0.59 - \frac{1.32}{\sqrt{\alpha}}\right) c_{sh} \quad (5.50)$$

On veut maintenant déterminer les valeurs des rapports de la densité des points  $C$  et  $D$  formant l'intervalle sur laquelle il n'existe pas de solutions physiques au modèle d'expansion quasi-neutre (voir la figure 5.4). Ces rapports en densités ( $y_C$  et  $y_D$ ) vérifient  $d\xi/d\varphi|_{y_C} = 0$  et  $d\xi/d\varphi|_{y_D} = 0$ , ils correspondent aux points singuliers de l'écoulement. On obtient après résolution :

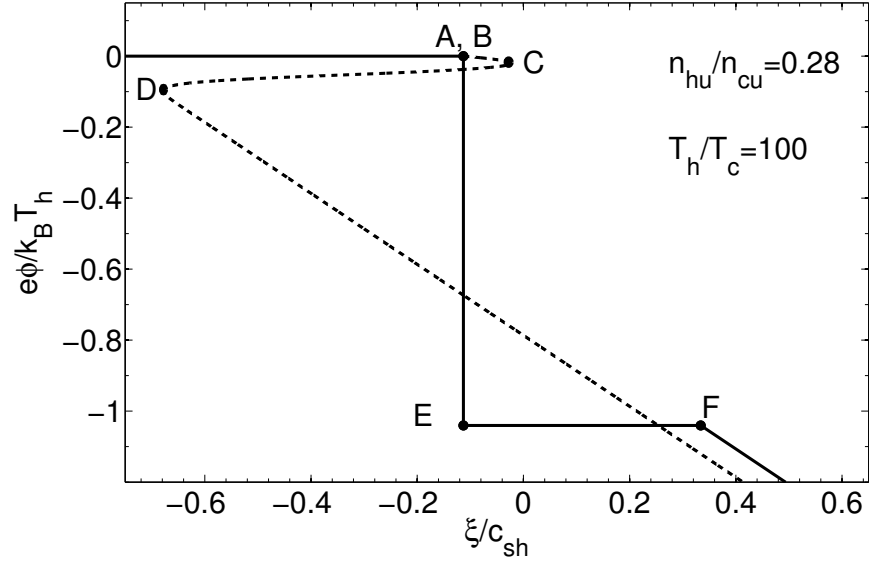
$$y_C \simeq 2 \left(1 + \frac{6}{\alpha}\right) \quad (5.51)$$

et

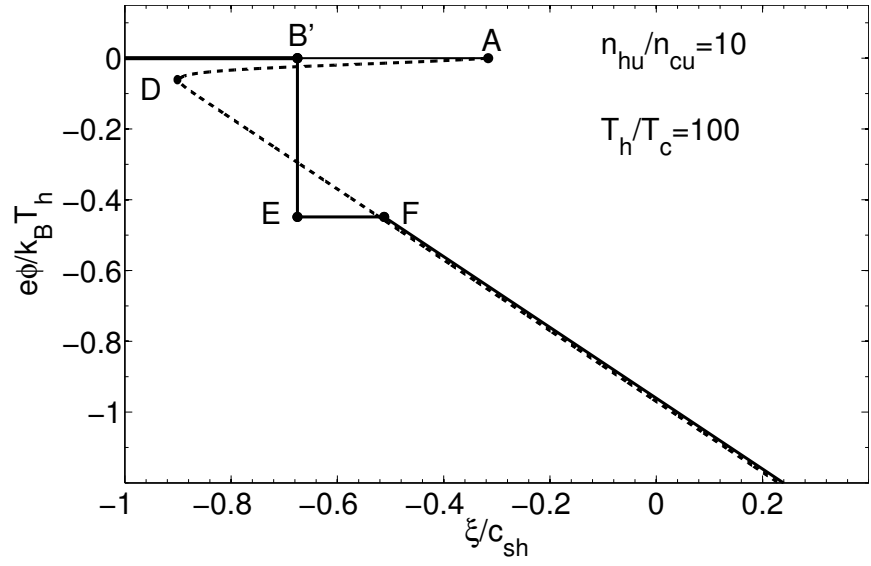
$$y_D \simeq \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{6}{\alpha}\right) \quad (5.52)$$

### 5.3.2 Régime d'expansion supersonique

Si  $y_u = y_B$ , l'analyse que nous avons effectuée aux sections 5.3.1-5.3.1 reste valable. Cependant, la région d'expansion du plasma dominée par les électrons froids (la courbe [A-B] sur la figure 5.4) disparaît, et les points  $A$  et  $B$  deviennent confondus comme le montre la figure 5.10. En effet, la région non perturbée du plasma est directement connectée au choc de raréfaction, et ce dernier se propage à l'intérieur du plasma à la vitesse du son  $c_s$ . La comparaison des figures 5.4 et 5.10 montrent, pour  $\alpha$  fixé et  $y_u \leq y_B$ , que les caractéristiques de la structure du choc : l'amplitude du saut en potentiel, la longueur du plateau, restent inchangées.



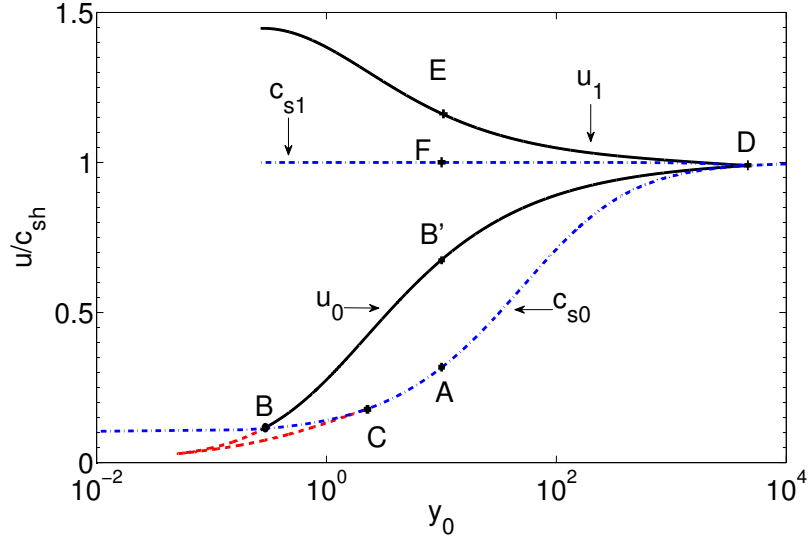
**FIGURE 5.10** – Profil spatial du potentiel électrique pour  $y_u = y_B \simeq 0.28$  (la valeur de transition pour  $\alpha = 10^2$ ). Ligne continue représente le résultat de la formule (4.19).



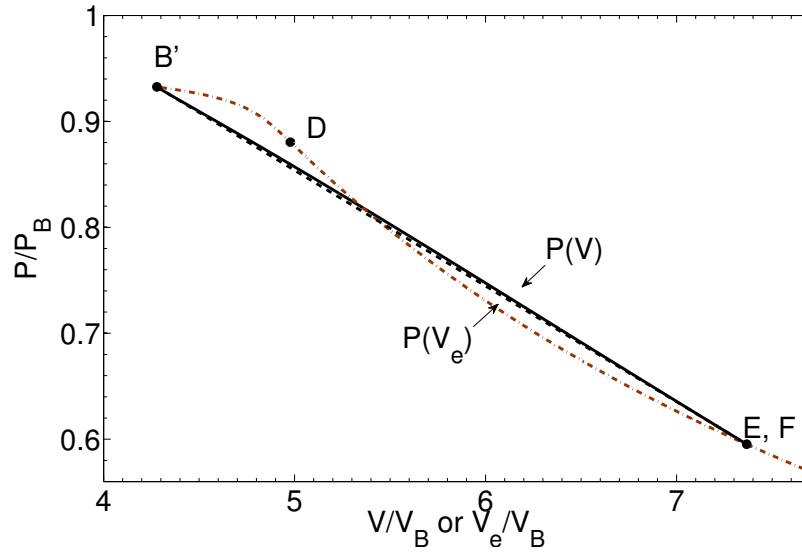
**FIGURE 5.11** – Similaire à la figure 5.10 pour  $y_u = 10$  et  $\alpha = 10^2$ .

Pour  $y_u > y_B$  (avec  $y_u < y_D$ ), la structure de l'expansion est modifiée (par rapport au régime standard) comme l'illustre la figure 5.11 pour les paramètres plasma suivants  $\alpha = 100$  et  $y_u = 10$ . Le plasma non-perturbé est directement connecté au choc de raréfaction. En outre, ce dernier se propage à l'intérieur du plasma à une vitesse supersonique  $u_0 > c_s$ . De plus sa position  $B'$  est davantage située à l'intérieur du plasma qu'à la position virtuelle de l'onde de raréfaction  $A$ . On peut remarquer que, contrairement aux cas précédents (ceux pour lesquels  $y_u \leq y_B$ ), le saut en potentiel et la longueur du plateau se réduisent fortement lorsque le rapport en densité  $y_u$  croît.

D'autre part, la relation d'Hugoniot (5.13) reste valable, mais désormais le rapport en densité correspondant à la position en amont du choc  $y_0$  est donné par  $y_u$ . La figure 5.12 est similaire à la figure 5.7, en dehors du fait que les points  $A$ ,  $B'$ ,  $E$ , et  $F$  correspondent aux paramètres de la figure 5.11, c'est à dire à  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10$ . De même la figure 5.13 est similaire à la figure 5.8 avec les positions des points  $B'$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $F$  correspondant aux paramètres de la figure 5.11. Au niveau du point  $B'$ , la pente de la courbe  $P(V)$  est plus grande que celle de la courbe  $P(V_e)$ . Ce résultat découle du fait que le choc de raréfaction se propage à une vitesse supersonique dans le plasma non-perturbé,  $u_0 (= c_{si}) > c_s$ . On rappelle que dans la région du plasma non perturbé, l'écoulement est quasi-neutre donc  $u_0 = c_{si}$ . Dans la région aval du choc, la situation est similaire au cas standard. Cependant, la différence des valeurs de la pente des deux courbes  $P(V)$  et  $P(V_e)$  aux points  $E$  et  $F$  est plus petite, provoquant du coup une contraction de la longueur du plateau.



**FIGURE 5.12** – Similaire à la figure 5.7. Les points  $A$ ,  $B'$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont ceux de la figure 5.11.



**FIGURE 5.13** – Similaire à la figure 5.7. Les points  $A$ ,  $B'$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont ceux de la figure 5.11.

## Nombre de Mac

On s'intéresse ici au nombre de Mac en amont de l'écoulement, défini par le rapport de la vitesse de l'écoulement en amont du choc à la vitesse du son, soit  $M = u_0/c_s$ . Dans la limite d'un rapport en température très grand,  $\alpha \gg 1$ , les équations (4.16), (5.13), et (5.14) peuvent être simplifiées en négligeant les termes du second ordre  $1/\alpha$  et les termes en  $e^{-\alpha w}$ . Elles deviennent alors :

$$c_s(y_u) \approx c_{sh} \sqrt{\frac{1+y_u}{\alpha}} \quad (5.53)$$

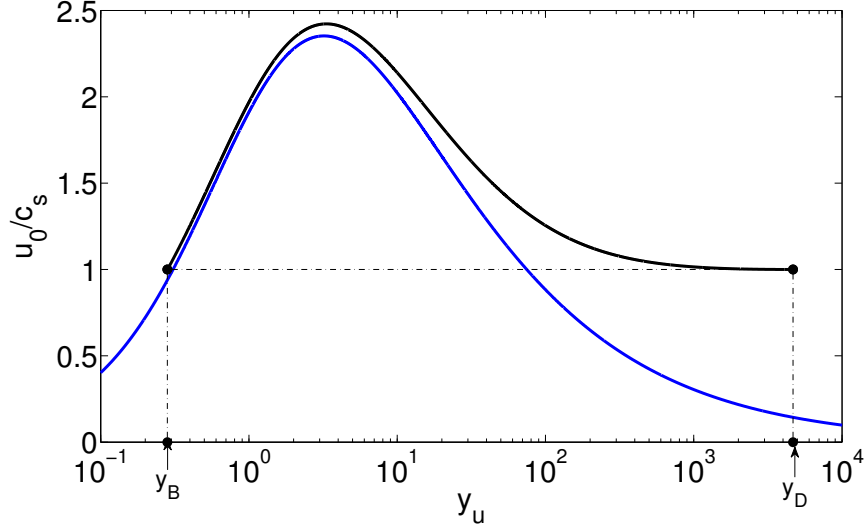
$$w \simeq \frac{1}{2} (1 - e^{-w}) \left( \frac{y_u}{y_u + 1} + e^w \right) \quad (5.54)$$

et

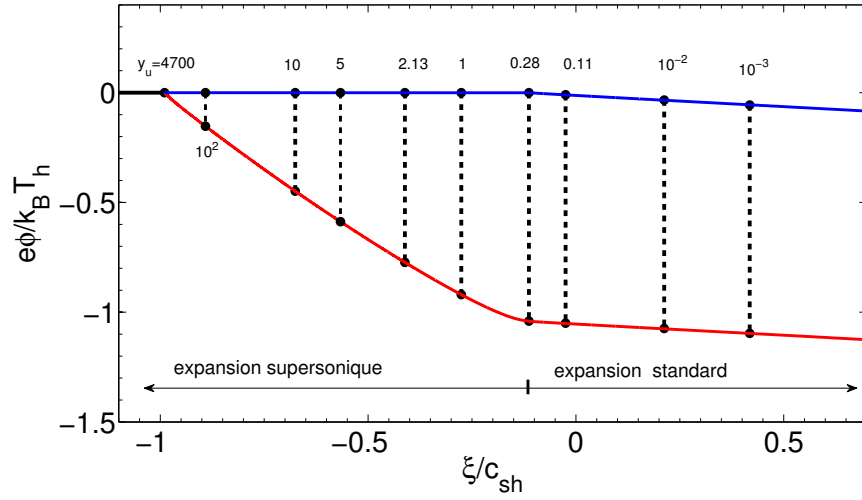
$$u_0 \simeq c_{sh} \left[ \frac{2w}{\left( \frac{y_u+1}{y_u} e^w \right)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (5.55)$$

La résolution de ces équations repose sur le même principe que celui qui a été exposé à la section 5.2. On se donne une valeur de l'amplitude du saut en potentiel  $w$ , puis on résout (5.54) pour déterminer  $y_u$ , ensuite à partir de (5.53) et (5.55) on calcule les valeurs de  $c_s$  et de  $u_0$ .

Le résultat obtenu est montré sur la figure 5.14 (courbe bleue), où on a représenté l'évolution du nombre de Mac ( $u_0/c_s$ ) en amont de la discontinuité en fonction du rapport en densité dans le plasma non-perturbé  $y_u$ , pour  $\alpha = 10^2$ . Nous avons représenté également sur ce graphe la solution réelle obtenue en résolvant (5.13) avec la contrainte (4.47). Les deux résultats ont un bon accord dans la limite,  $y_u \geq 10^2$  (pour  $\alpha = 10^2$ ). On observe que le nombre de Mac croît pour les valeurs intermédiaires de  $y_u$ , plus précisément pour ( $y_u \geq y_B$ ). Il atteint son maximum pour  $y_u \simeq 3.2$ , pour lequel on a :  $u_0 \simeq 2.4 c_s$ , ou encore  $u_0 \simeq 0.49 c_{sh}$ . Pour ( $y_u \leq y_B$ ) et ( $y_u \geq y_D$ ) le nombre de Mac vaut 1. Ainsi, la région de la courbe pour laquelle ( $u_0 < c_s$ ) n'est pas physique.



**FIGURE 5.14** – Nombre de Mac en amont du choc  $u_0/c_s$  en fonction de  $y_u$  pour  $\alpha = 10^2$ . La courbe bleue correspond à la solution approximative obtenue avec les équations (5.53)-(5.55).



**FIGURE 5.15** – Variation de la position du choc en fonction de  $y_u$  dans le plan  $(\phi, \xi)$ , pour  $\alpha = 10^2$ . Les barres représentent l'amplitude du choc, et les points noirs correspondent aux positions amont et aval du choc de raréfaction. Les valeurs du rapport en densité sont (de gauche à droite) :  $y_u = y_D \simeq 4700$ ,  $10^2$ , 10, 5,  $y_C \simeq 2.13$ , 1,  $y_B \simeq 0.28$ , 0.11,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ .

## Sens de déplacement du choc

La figure 5.15 montre la position et l'amplitude du saut en potentiel du choc de raréfaction en fonction de  $\xi$ , pour différentes valeurs de  $y_u$ . Les points noirs correspondent respectivement aux positions amont et aval du choc. Suivant la valeur de  $y_u$ , on observe que le choc de raréfaction se déplace soit vers le plasma non perturbé ( $\xi_S < 0$ ), soit vers la région du vide ( $\xi_S > 0$ ). Pour trouver la frontière entre ces deux régimes, on cherche la valeur du rapport en densité  $y_{front}$  pour laquelle  $\xi_S(y_{front})$  est nulle. La relation (5.47) donne alors :

$$\ln \left( \frac{y_0}{y_{front}} \right) + \frac{y_{front}}{2} - y_0 - 1 \simeq 0 \quad (5.56)$$

de sorte que :

$$-\ln y_{front} + \frac{y_{front}}{2} + C_0 \simeq 0 \quad (5.57)$$

où  $C_0 = \ln y_0 - y_0 - 1$ . En résolvant cette équation transcendante pour  $\alpha = 10^2$ , on trouve alors  $y_{front} \simeq 0.08$ . Cette solution numérique est obtenue avec un algorithme basé sur la méthode de la bisection. Le critère sur le sens du déplacement du choc de raréfaction s'écrit alors : pour  $y_u > y_{front}$ , le choc de raréfaction se déplace vers l'intérieur du plasma non-perturbé, et pour  $y_u < y_{front}$  la discontinuité se propage vers la région du vide.

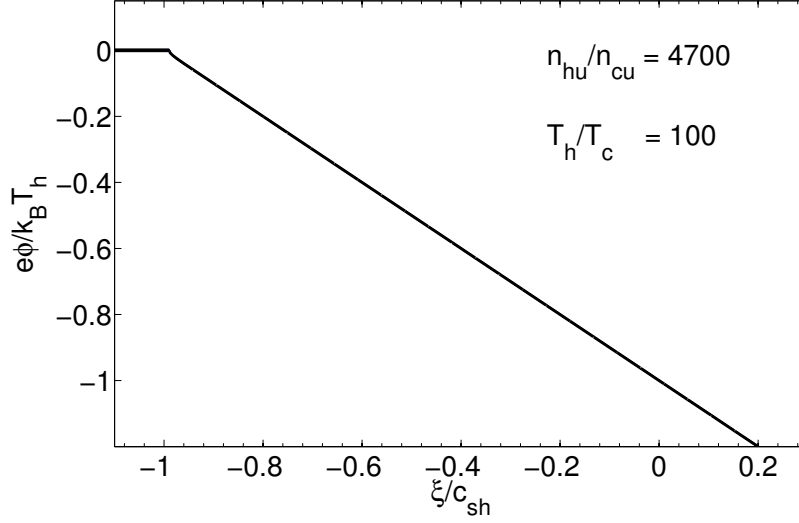
### 5.3.3 Régime d'expansion : raréfaction des électrons chauds

Dans la limite  $y_u \geq y_D$ , les électrons froids deviennent négligeables, et peuvent ainsi être considérés comme des particules test. La figure 5.16 montre le profil spatial du potentiel électrique calculé avec la formule (4.19), pour les paramètres initiaux suivants  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = y_D \simeq 4700$ . On voit que le choc de raréfaction et le plateau disparaissent complètement, comme on pourrait s'y attendre pour des plasmas avec un rapport en densité tel que  $y_u \geq y_D$ . Ainsi, la région d'expansion dominée par les électrons chauds est directement connectée au plasma non-perturbé. Par conséquent, les éléments caractéristiques de la structure de l'expansion du plasma peuvent être obtenues en utilisant les solutions du modèle d'expansion auto-semblable et quasi-neutre pour un plasma avec une seule population d'électrons [7]. Le potentiel électrique peut alors s'écrire sous la forme :

$$-e\phi/k_B T_h \simeq 1 + \xi/c_{sh} \quad (5.58)$$

Ce modèle est celui utilisé le plus souvent pour interpréter certains résultats expérimentaux de l'interaction laser-solide (calcul de la température des électrons chauds, estimation de la vitesse maximale des ions, etc), même si comme nous l'avons montré dans ce chapitre la structure du plasma en expansion est modifiée lorsque la proportion des électrons de basse énergie dans le plasma n'est pas négligeable par rapport aux électrons chauds.





**FIGURE 5.16** – *Profil spatial du potentiel électrique calculé avec la formule (4.19), pour  $y_u = y_D \simeq 4700$  (valeur pour laquelle le choc de raréfaction disparaît du plasma pour  $\alpha = 10^2$ ).*

## 5.4 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre établi les conditions nécessaires à la présence d'un choc de raréfaction dans un plasma bi-Maxwellien. Celles-ci sont exprimées en fonction des rapports en température  $\alpha = T_h/T_c$  et en densité  $y_u = n_{hu}/n_{cu}$  du plasma. La résolution de l'Hugoniot du choc nous a permis de déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du choc (amplitude, position, vitesse en amont et aval du choc, champ électrique, etc), et par conséquent de construire la structure complète de l'écoulement.

La valeur du rapport en densité dans le plasma initial  $y_u$  conditionne la nature du régime d'écoulement du plasma. Ainsi, pour  $y_u \leq y_B$  où  $y_B$  est le rapport en densité des électrons à la position amont du choc, nous avons le régime standard pour lequel on identifie : la région non perturbée du plasma, une expansion lente dominée par les électrons froids, un choc de raréfaction, un plateau et enfin une région d'expansion dominée par les électrons chauds. Ce régime standard correspond à celui de l'interaction laser-solide à haut flux. Dans la limite où la température des électrons chauds est très importante devant celle des froids ( $T_h \gg T_c$ ), des expressions analytiques simples des caractéristiques de l'écoulement ont été obtenues. Pour  $y_B \leq y_u < \alpha^2/2$ , nous avons le régime supersonique pour lequel le choc de raréfaction se connecte directement à la région non-perturbée du plasma, et ainsi se déplace à une vitesse supersonique. Par conséquent, la région d'expansion dominée par les électrons froids disparaît. Enfin, pour  $y_u \geq \alpha^2/2$  il n'existe plus de choc de raréfaction dans le plasma et la région d'expansion dominée par les électrons chauds se connecte au plasma initial, c'est le régime de raréfaction des électrons chauds.

# Chapitre 6

## Comparaisons avec les simulations

### 6.1 Description du code

Dans cette partie, nous allons effectuer des simulations avec un code numérique unidimensionnel, non relativiste et non collisionnel développé au Centre de Physique Théorique par Patrick Mora [12]. Il simule l'expansion d'un plasma (semi-infini ou de taille finie) dans le vide. Les résultats des simulations vont être confrontés à ceux du modèle analytique. Les effets du choc de raréfaction sur l'accélération des ions seront également regardés.

Dans ce code, les électrons, supposés en équilibre de Boltzmann avec le potentiel électrostatique, sont décrits comme un fluide avec une densité définie par  $n_e(\phi) = n_{e0} \exp(e\phi/k_B T_e)$ . Il existe une option dans ce code considérant les électrons en régime relativistes, l'étude de ces effets relativistes ne rentre pas dans le cadre de cette thèse. Les ions sont traités comme un fluide lagrangien, où les frontières de mailles s'identifient aux positions des ions.

Pour mieux décrire la couche non-neutre à l'interface plasma-vide, le code utilise un maillage spatial à pas variable. Celui-ci repose sur le fait que la charge électrique de chaque maille suit une progression géométrique. On peut l'écrire alors sous la forme :

$$q(i) = p q(i - 1) \quad (6.1)$$

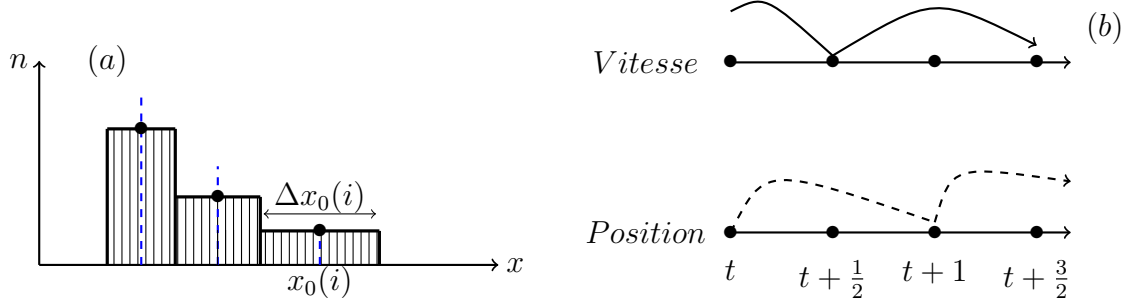
où  $p$  est la raison de la progression. En outre, la charge électrique normalisée d'une maille centrée au point  $x_0(i)$  est donnée par :

$$q(i) = n(i) \frac{\Delta x_0(i + 1) + \Delta x_0(i)}{2} \quad (6.2)$$

Ici  $n(i)$  est la densité ionique au point  $x_0(i)$  et  $\Delta x_0(i)$  le pas spatial initial défini tel que  $\Delta x_0(i) = x_0(i) - x_0(i - 1)$ . En utilisant (6.1) et (6.2), on obtient une expression de la progression du pas spatial :

$$\Delta x_0(i) = p \frac{n(i - 2)}{n(i - 1)} [\Delta x_0(i - 1) + \Delta x_0(i - 2)] - \Delta x_0(i - 1) \quad (6.3)$$

Deux conditions d'initialisation sont nécessaires pour ce maillage spatial,  $\Delta x_0(1)$  et  $\Delta x_0(2)$ . Dans le cas où la densité ionique est constante d'une maille à l'autre, on trouve une relation plus simple pour le pas spatial  $\Delta x_0(i) = p^{i-1} \Delta x_0(1)$ . La méthode de discrétisation pour le maillage spatial est illustrée sur la figure 6.1 (a).



**FIGURE 6.1** – Schémas du maillage (a) spatial et (b) temporel du type saute-mouton.

La dynamique des ions est déterminée grâce à la résolution des équations lagrangiennes normalisées. Celles-ci s'écrivent :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (6.4)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6.5)$$

La discrétisation de ces équations se fait à l'aide d'un schéma du type saute-mouton (leap-frog) présenté sur la figure 6.1. (b).

Par ailleurs, le code prend également en compte les effets de séparation de charges en résolvant de façon itérative l'équation de Poisson. D'abord à  $t = 0$ , celle-ci s'écrit :

$$\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = en_{hu} \left[ \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_h}\right) + \frac{1}{y_u} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_c}\right) - 1 - \frac{1}{y_u} \right] \quad \text{si } x < 0 \quad (6.6)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = en_{hu} \left[ \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_h}\right) + \frac{1}{y_u} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_c}\right) \right] \quad \text{si } x \geq 0 \quad (6.7)$$

avec les conditions limites suivantes :

$$\begin{aligned} E(x \rightarrow -\infty) &= 0 & \phi(x \rightarrow -\infty) &= 0 \\ E(x \rightarrow \infty) &= 0 & \phi(x \rightarrow \infty) &= -\infty \end{aligned}$$

L'expression du potentiel électrostatique est obtenue en utilisant la continuité du champ électrique à l'interface plasma-vide

$$e\phi(0) = -k_B T_c \frac{1 + \alpha y_u}{1 + y_u} \quad (6.8)$$

Pour  $t > 0$ , on linéarise l'équation de Poisson autour de  $\phi_0$  correspondant à la valeur du potentiel au pas de temps précédent, puis la résolution numérique du système matriciel permet de corriger cette valeur du potentiel. Il est alors possible d'itérer en linéarisant l'équation de Poisson autour de cette nouvelle valeur, etc. Le pas de la discrétisation temporelle est choisi pour assurer la stabilité du plasma, et dans la plupart des cas étudiés il est pris tel que  $\omega_{pih}\Delta t = 10^{-1}$  où  $\omega_{pih} = (n_{hu}e^2/\epsilon_0 m_i)^{1/2}$  est la fréquence plasma ionique associée aux seuls électrons chauds dans le plasma non-perturbé. Dans cette partie de la thèse, on utilise l'option du code pour laquelle la température des électrons ne varie pas dans le temps.

Afin d'étudier la structure de l'expansion, nous avons effectué des simulations numériques pour des plasmas avec un rapport en température  $\alpha = 10^2$ . Dans un premier temps, nous avons considéré le cas standard ( $y_u \ll 1$ ), dans lequel le choc de raréfaction est connecté à la région d'expansion dominée par les électrons froids. Cet expansion sera illustrée pour  $y_u = 10^{-2}$ . Ce régime permet également d'aborder le choc de raréfaction puis d'explicitier ses effets sur les mécanismes d'accélération des ions et en particulier sur le spectre des ions. Les plasmas considérés dans cette partie sont proches de ceux obtenus lors de l'interaction laser plasma à haute intensité.

Ensuite, nous considérerons le régime d'expansion supersonique correspondant à des valeurs du rapport en densité telles que  $y_u > y_B$ , pour lequel le choc de raréfaction se connecte directement à la région non perturbé du plasma.

Nous n'allons pas discuter le régime pour lequel  $y_u = y_B$ , qui est un cas particulier du régime standard dans la mesure où même si la région d'expansion dominée par les électrons froids disparaît, les autres caractéristiques de l'expansion restent identiques à celles du régime standard.

La normalisation utilisée dans ce code est décrite sur le tableau suivant :

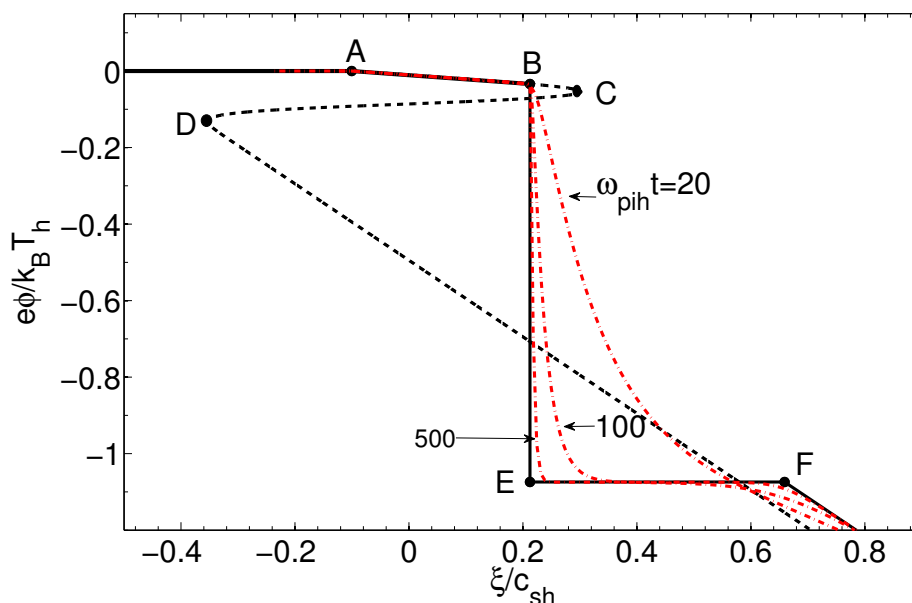
Variable	Nom	Normalisation
$t$	temps	$\omega_{pih}^{-1} = (\epsilon_0 m_i / n_{hu} e^2)^{1/2}$
$x$	longueur	$\lambda_{Dhu} = (\epsilon_0 k_B T_h / n_{hu} e^2)^{1/2}$
$v$	vitesse	$c_{sh} = (Z k_B T_h / m_i)^{1/2}$
$n, n_e$	densité	$n_{hu}$
$\phi$	potentiel	$k_B T_h / e$
$E$	champ	$E_u = (n_{hu} k_B T_h / \epsilon_0)^{1/2}$

## 6.2 Résultats des simulations

### 6.2.1 Profils spatiaux

L'étude menée dans cette partie permet de comparer la structure du choc de raréfaction avec les résultats du modèle analytique, mais aussi avec les résultats expérimentaux puisque nous nous plaçons dans le cas où les électrons froids sont majoritaires initialement dans le plasma.

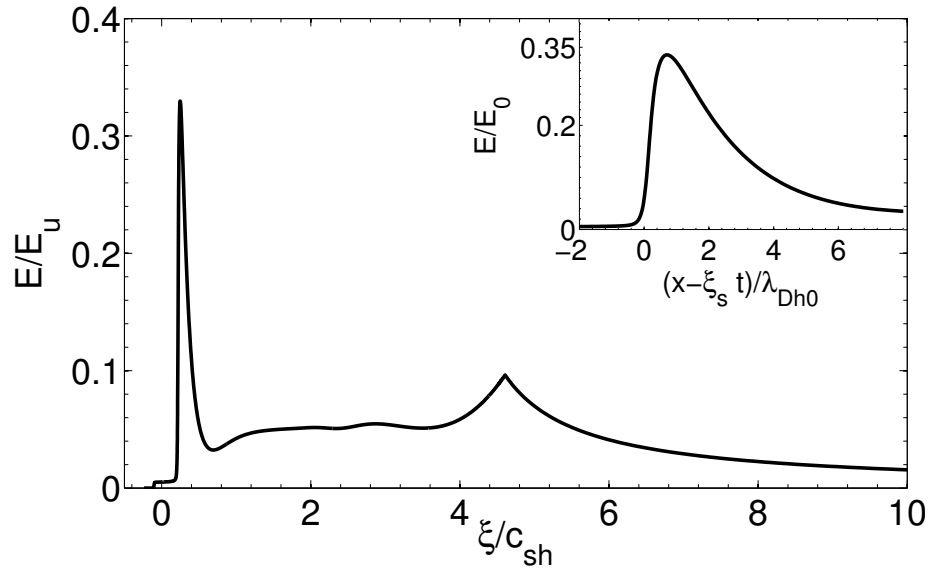
La figure 6.2 présente le profil spatial du potentiel électrostatique (en points-tirets) à différents instants  $\omega_{pih}t = 20, 100, \text{ et } 500$  pour  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . Pour faciliter la comparaison avec la figure 5.4, on a également tracé (tirets) la solution du modèle d'expansion avec l'hypothèse quasi-neutre découlant de l'intégration numérique de la formule (4.19). Enfin, la solution physique (trait continu) de l'écoulement obtenue avec le modèle analytique présenté dans la section 5 est également illustrée sur la figure 6.2. On observe un excellent accord entre la solution physique de l'expansion et les résultats numériques, en particulier pour les temps d'expansion suffisamment longs,  $\omega_{pih}t \gg 1$ . De plus, comme nous l'avons déjà évoqué dans la section 5.3.1, la largeur du choc de raréfaction est déterminée par la longueur de Debye locale.



**FIGURE 6.2** – Profil spatial du potentiel électrique du plasma pour  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . En tirets-points : résultats des simulations aux temps  $\omega_{pih}t = 20, 100, \text{ et } 500$ . En trait continu : la solution physique de l'expansion. En tirets : le résultat du modèle d'expansion quasi-neutre (4.19).

On s'intéresse maintenant aux effets du choc de raréfaction sur l'accélération des ions, pour cela le profil du champ électrique  $E$  en fonction de  $\xi$  est représenté sur la figure 6.3, au temps  $\omega_{pih}t = 20$ . L'encart montre un zoom autour de la position du choc de raréfaction, où le champ électrique  $E$  est présenté comme une fonction de  $X' = x - \xi_s t$ . Les mêmes grandeurs de normalisation sont utilisées à la fois pour l'encart et pour la figure 5.9(b). Numériquement, on trouve que la valeur de la densité des électrons chauds en aval du choc est de l'ordre de  $n_{h0} \simeq 0.967 n_{hu}$ . Par conséquent, la différence entre les deux normalisations  $E_u$  et  $E_0$  est inférieure à 2%. Ainsi l'accord obtenu, entre le champ électrique à l'intérieur du choc obtenu avec les simulations et sa valeur résultant de la résolution numérique de l'équation de Poisson, est très satisfaisant.

Par ailleurs, nous observons deux pics sur le profil spatial du champ électrique [9, 10]. Le premier pic, situé à  $x \simeq \xi_s t$ , correspond au choc de raréfaction. Il est en parfait accord avec la discussion effectuée dans la section 5.3.1 [voir la figure 5.9 (b)]. La position et l'amplitude du choc sont indépendantes du temps dans le système  $(\xi, t)$ . En revanche, le second pic du champ électrique correspond au front d'ions comme l'a montré Mora [7], et confirmé ensuite expérimentalement par Romagnani *et al.*[43]. La position de ce pic se déplace de façon logarithmique dans l'espace  $\xi$  avec une amplitude tendant vers 0 comme  $2E_u/\omega_{pih}t$ .



**FIGURE 6.3** – Profil spatial du champ électrique au temps  $\omega_{pih}t = 20$ , pour les paramètres plasma suivant :  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . Le champ électrique au niveau de l'encart (un zoom sur le pic du choc de raréfaction) est normalisé à  $E_0 = (n_{h0}/n_{hu})^{1/2} E_u$ .

## 6.2.2 Vitesse du front de raréfaction

La vitesse du front d'ions (correspondant au second pic sur la figure 6.3) en fonction du temps est illustrée sur la figure 6.4 pour les paramètres plasma suivants :  $\alpha y_u = 1$ ,  $\alpha y_u \gg 1$  et  $\alpha y_u \ll 1$ . Nous avons également représenté (en trait plein) la vitesse du front d'ions obtenue pour un plasma avec une seule population d'électrons (c'est-à-dire  $y_u = \infty$ ).

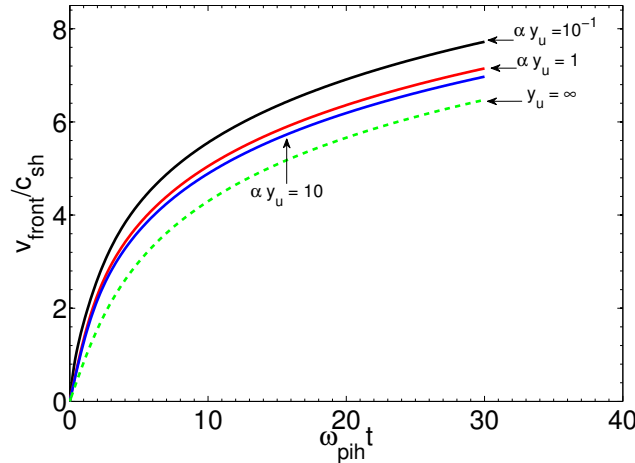
On observe une faible différence entre les différentes courbes (au vu de la valeur du rapport en densité des électrons). Celle-ci est essentiellement due à l'effet de la phase initiale du champ électrostatique du plasma. En effet, la présence des électrons froids induit une augmentation très légère de la force du champ accélérateur, au temps initial  $t = 0$ , comme l'ont démontré Passoni *et al.* [22] et Bychenkov *et al.* [23]. Leur calcul [22] montre que le champ électrique du front d'ions pour un plasma composé de deux populations d'électrons bi-Maxwelliennes s'écrit sous la forme :

$$E_{front,0} \simeq \sqrt{\frac{2}{e_N} \frac{1}{\alpha y_u}} E_u \quad \text{si} \quad \alpha y_u \ll 1 \quad (6.9)$$

$$E_{front,0} \simeq \sqrt{2} E_u \quad \text{si} \quad \alpha y_u = 1 \quad (6.10)$$

$$E_{front,0} \simeq \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y_u}{y_u + 1}\right) E_u \quad \text{si} \quad \alpha y_u \gg 1 \quad (6.11)$$

avec  $e_N$  le nombre de Néper. Si on considère un plasma dans lequel la pression des électrons froids est supérieure à celle des chauds, i.e,  $\alpha y_u \gg 1$ , on voit clairement d'après cette formule (6.11) que le champ électrique initial augmente sensiblement et par conséquent la vitesse du front d'ions croît également. Pour le cas illustré sur la figure 6.3, le modèle analytique prédit un facteur d'amplification de l'ordre de  $\sqrt{2}$ , une valeur proche du résultat obtenu avec les simulations.

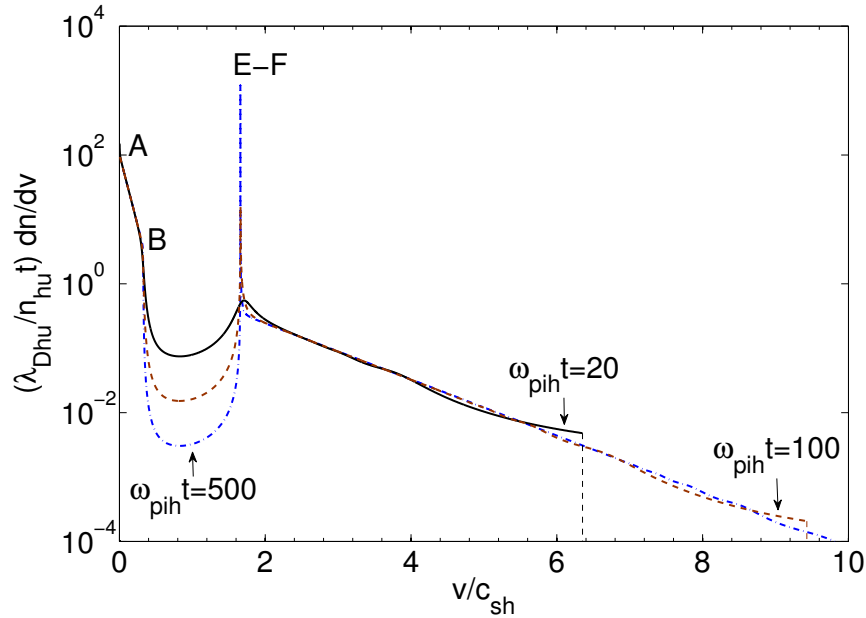


**FIGURE 6.4** – Vitesse du front d'ions en fonction du temps pour :  $\alpha y_u = 10^{-1}$ ,  $\alpha y_u = 1$  et  $\alpha y_u = 10$ . La courbe en pontillés correspond au cas  $y_u = \infty$ .

### 6.2.3 Spectre des ions

Le spectre des ions mesuré permet souvent d'estimer l'énergie maximale des ions, le nombre d'ions accélérés, la forme de la distribution en énergie des ions (donc celle des électrons). La figure 6.5 illustre le spectre en vitesse des ions normalisé pour un plasma tel que  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . La normalisation avec le temps se justifie par la croissance quasi-linéaire dans le temps du nombre d'ions accélérés.

On observe sur ce spectre une région de faible vitesse correspondant à l'expansion des électrons froids (droite  $A-B$  sur la figure 5.4), le creusement correspondant au choc (courbe  $B-E$ ), le pic correspondant au plateau (courbe  $E-F$ ), et une région de haute vitesse correspondant à l'expansion dominée par les électrons chauds (à droite de  $F$ ) jusqu'au point de coupure de la vitesse (le cut-off). Ce creusement dans le spectre des ions est caractéristique des plasmas possédant deux populations d'électrons de densité et de température différentes.



**FIGURE 6.5** – Spectre en vitesse des ions à différents instants pour un rapport en densité dans le plasma initial  $y_u = 10^{-2}$  et  $\alpha = 10^2$ . Les points A, B, C, D, E et F correspondent aux différentes positions de l'écoulement identifiées sur la figure 6.2.



## 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps présenté en détail le fonctionnement du code numérique hybride 1-D, puis comparé les résultats des simulations obtenus avec le modèle analytique. Les ions sont traités comme des macro-particules, leur dynamique est décrite par les équations de mouvement et de continuité. Les électrons sont considérés comme un fluide en équilibre de Boltzmann avec le potentiel électrostatique du plasma. Ce système se complète avec l'équation de Poisson reliant la densité des électrons et des ions.

Nous avons effectué des simulations avec des paramètres plasma correspondant au régime d'expansion standard, c'est-à-dire à celui de l'interaction laser solide. Les résultats des simulations numériques montrent que le choc de raréfaction se forme sur des temps d'expansion longs  $\omega_{phit} \geq 100$ . Par ailleurs une comparaison avec le modèle analytique nous donne un bon accord aussi bien pour l'amplitude du potentiel électrique que pour la position du choc. L'existence du choc de raréfaction se traduit par la présence d'un pic sur le profil du champ électrique. Ce pic est suivi d'un plateau puis d'un deuxième pic correspondant au front d'ions. Les champs électriques obtenus avec ces deux modèles sont conformes. Nous avons également vu que la présence des électrons de basse énergie a un effet positif sur l'énergie maximale des ions. En effet, le champ accélérateur initial augmente légèrement du fait de la pression des froids, ce qui assure une amplification de la vitesse maximale des ions accélérés. Enfin, nous avons observé le creusement au niveau du spectre en vitesse des ions qui est la signature de la présence de deux populations d'électrons dans un plasma. Par ailleurs, le choc de raréfaction se caractérise par un pic  $\delta$ -Dirac sur le spectre en vitesse des ions.

Le modèle d'expansion que nous avons discuté considère un plasma semi-infini, c'est à dire que la densité et la température des électrons sont indépendantes du temps. Cette hypothèse confine la pertinence de ce modèle, comparativement à des expériences laser-solide, sur des temps typiquement de l'ordre de la durée de l'impulsion laser. Dans la seconde partie de cette thèse, nous allons considérer l'expansion dans le vide d'une feuille mince, ce qui suppose une conservation de l'énergie et de la densité des particules.

## **Deuxième partie**

### **Étude cinétique**

# Chapitre 7

## Étude cinétique de l'expansion d'un plasma bi-Maxwellien

Ce chapitre a pour objectif l'étude cinétique de l'expansion d'une feuille de plasma dans un vide avec une fonction de distribution des électrons initialement bi-Maxwellienne. Il est le prolongement du travail qui a été mené dans les chapitres précédents. On commence par présenter le code utilisé : équations générales, méthode de résolution de l'équation de Vlasov, et schéma numérique. Ensuite, on présente les différents régimes d'expansion en fonction des paramètres initiaux du plasma (rapport en température, rapport en densité, et longueur initiale du plasma), puis on explore le transfert d'énergie entre les électrons froids, les électrons chauds et les ions du plasma. L'influence des électrons froids sur l'accélération des ions est également étudiée. Pour finir on évoque l'évolution de la structure du choc de raréfaction, et on la compare avec le cas d'un plasma isotherme.

### 7.1 Présentation du code

Nous disposons ici d'un code cinétique [13], unidimensionnel, non-collisionnel, et non-relativiste pour simuler l'expansion d'une feuille de plasma dans un vide. Ce code numérique a été utilisé pour mettre en évidence l'accélération de l'onde de raréfaction, résultant de la déformation de la fonction de distribution initiale des électrons, lors de l'expansion d'un plasma dans le vide [14].

La dynamique des électrons, avec une fonction de distribution  $f_e(x, v_e, t)$ , est décrite par l'équation de Vlasov. Cette dernière s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial f_e}{\partial x} + \frac{m}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_e}{\partial v_e} = 0 \quad (7.1)$$

où  $m_e$  est la masse des électrons, et  $v_e$  la vitesse d'un électron. Nous avons gardé la même notation qu'aux chapitres précédents :  $\phi(x, t) = m \varphi / e$  est le potentiel électrostatique du

plasma, et  $m = m_i/Z$ . D'autre part les ions, de vitesse  $v$ , sont considérés comme des macro-particules ; ainsi leur dynamique est gouvernée par l'équation du mouvement,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (7.2)$$

avec

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (7.3)$$

Enfin, le potentiel électrostatique satisfait à l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{e^2}{m\epsilon_0}(n_e - n) \quad (7.4)$$

avec

$$n_e(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e dv_e \quad (7.5)$$

Une façon de résoudre l'équation de Vlasov est de trouver un invariant adiabatique du mouvement des électrons du système [61]. En effet, la connaissance d'un invariant peut être très utile pour prédire le mouvement d'une particule. Afin de construire cet invariant, on procède d'abord à une séparation d'échelles caractéristiques de temps. Celle-ci est possible du fait de la petitesse du rapport entre le temps caractéristique de variation du potentiel électrostatique  $t_\phi = |\partial_t\phi/\phi|^{-1}$  et la période de transit d'un électron à l'intérieur du puits de potentiel  $\Gamma = \oint \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\phi}}$ ,

$$\Gamma/t_\phi \ll 1 \quad (7.6)$$

où  $\mathcal{E}(t)$  est l'énergie totale d'un électron. La démarche mathématique aboutissant à ce résultat est présentée en détail dans le papier de Grismayer *et al.* [13]. Ainsi l'invariant adiabatique du mouvement s'écrit :

$$I(\mathcal{E}, t) = \oint p dx \quad (7.7)$$

où  $p = m_e v_e$  est la quantité de mouvement d'un électron. Ensuite, on réécrit la fonction de distribution sous la forme  $f_e[I(\mathcal{E}, t)]$  de sorte que l'équation de Vlasov devient :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} - e \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial f_e}{\partial \mathcal{E}} = 0 \quad (7.8)$$

Pour résoudre cette équation, on fait appel à la méthode des caractéristiques. Premièrement, on calcule le taux de variation moyen de l'énergie sur une période. Il est donné par :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = - \left\langle e \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle = -e \frac{\oint \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\phi}}}{\oint \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\phi}}} \quad (7.9)$$

Deuxièmement, on se donne une fonction de distribution en vitesses des électrons, à l'instant initial. On procède ensuite à une discrétisation de cette dernière en un certain nombre de points (inférieur à 100) comme le montre la figure 7.1. Connaissant l'énergie  $v_j^2(0)$  et la valeur de  $f_j(0)$  d'un électron  $j$  à l'instant  $t = 0$ , on peut numériquement estimer la variation de l'énergie de l'électron  $j$  à l'instant  $t$  grâce à la relation (7.9). Puis, on utilise une propriété de l'équation de Vlasov selon laquelle la fonction de distribution  $f_j$  est conservée le long de la trajectoire de toute particule libre dans l'espace des phases  $(x-v)$ , pour reconstituer point par point la fonction de distribution  $f_e$  à l'instant  $t$ , et par conséquent obtenir toutes les grandeurs du plasma.

La normalisation de ce code est identique à celle utilisée dans le chapitre précédent ; toutes les grandeurs du plasma sont normalisées par rapport aux paramètres initiaux des électrons chauds. Le pas de la discrétisation temporelle est gouverné par la dynamique des ions. Pour assurer la stabilité du code, il est choisi tel que  $\Delta t = 0.2 / \max(\omega_{pih}, \omega_{pic})$ , où  $\omega_{pih} = (n_{hu}e^2/m\epsilon_0)^{1/2}$  et  $\omega_{pic} = (n_{cu}e^2/m\epsilon_0)^{1/2}$ .

### 7.1.1 Conditions initiales

Nous considérons ici l'expansion d'un plasma de taille finie, avec une longueur initiale  $L$ . Pour le reste, les conditions initiales du plasma sont identiques à celles utilisées au chapitre précédent. D'une part, les ions sont au repos avec une distribution en densité définie par :  $n = n_u$  pour  $|x| \leq L/2$  et  $n = 0$  pour  $|x| \geq L/2$ . Ici  $x$  est la direction normale à la cible, avec  $x = 0$  correspondant au centre de la cible. Du fait de la symétrie de l'expansion, on peut restreindre l'étude uniquement à la demi-part positive de la cible.

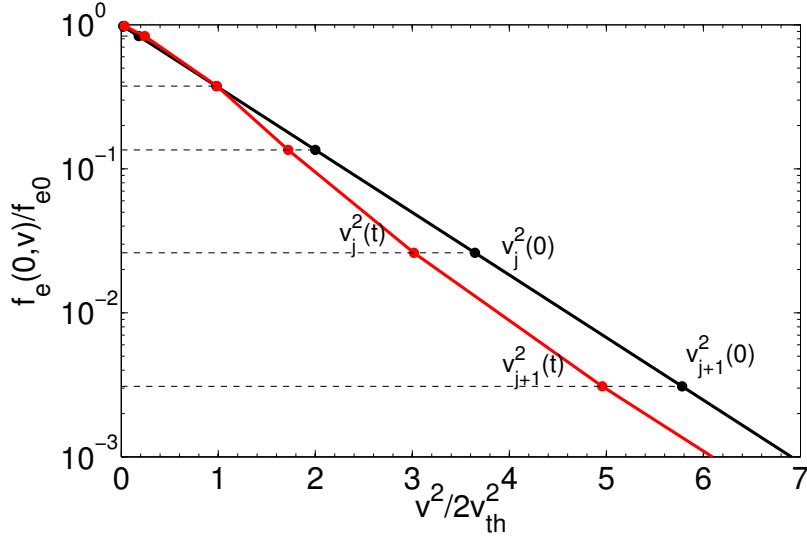
D'autre part, on considère que la fonction de distribution initiale des électrons chauds est une Maxwellienne

$$f_{h0}(x, v, 0) = n_{hu} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{h0}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{h0}}\right) \quad (7.10)$$

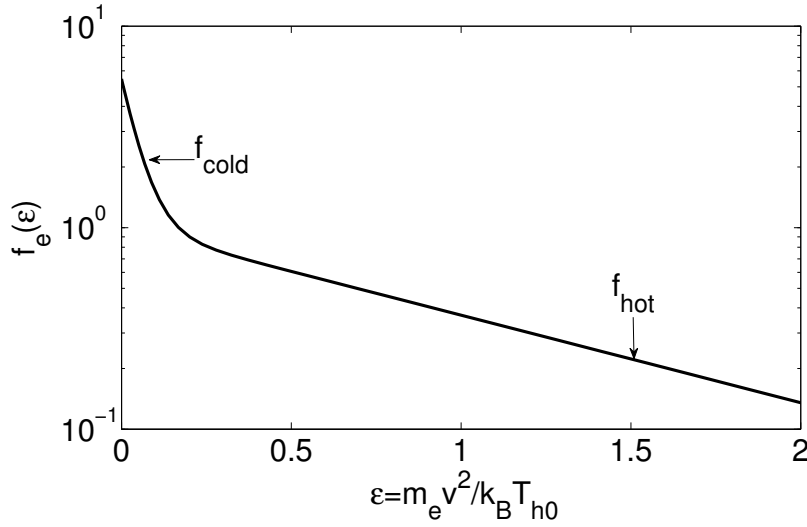
où  $n_{hu}$  et  $T_{h0}$  représentent la densité et la température initiale des électrons chauds. Une expression similaire est supposée pour la fonction de distribution des électrons froids,

$$f_{c0}(x, v, 0) = n_{cu} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{c0}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{c0}}\right) \quad (7.11)$$

où  $n_{cu}$  et  $T_{c0}$  correspondent à la densité et à la température initiales des électrons froids. La fonction de distribution globale des électrons du plasma est définie par :  $f_{e0} = f_{h0} + f_{c0}$ . Les densités des électrons satisfont la condition suivante  $n_{cu} + n_{hu} = n_u$ . Le champ électrique s'annule à l'infini ce qui assure une neutralité globale du plasma. La fonction de distribution initiale des électrons au centre du plasma est illustrée sur la figure 7.2, pour les paramètres plasma suivants :  $n_{cu} = n_{hu} = n_u/2$  et  $T_{h0}/T_{c0} = 20$ .



**FIGURE 7.1** – *Discrétisation d’une fonction de distribution au centre de la cible. La courbe noire correspond à la distribution initiale, alors que la courbe rouge représente la fonction de distribution reconstruite à l’instant  $t$ . Cette figure est adaptée de la Ref. [13].*



**FIGURE 7.2** – *Exemple de fonction de distribution initiale des électrons au centre du plasma pour les paramètres suivants :  $n_{cu} = n_{hu} = n_u/2$  et  $T_{h0}/T_{c0} = 20$  à  $t = 0$ . Chaque espèce d’électrons a une distribution en vitesse initiale Maxwellienne.*

## 7.1.2 Aspects énergétiques

On va s'intéresser dans la suite au transfert d'énergie entre les électrons, notamment à l'évolution temporelle de la température des électrons. Pour cela, on procède à la définition de certaines grandeurs nécessaires à notre discussion. Tout d'abord à un instant  $t$ , les densités des électrons chauds et froids s'écrivent sous la forme :

$$n_h(x, t) = \int f_h(x, v, t) dv \quad (7.12)$$

et

$$n_c(x, t) = \int f_c(x, v, t) dv \quad (7.13)$$

La forme de la fonction de distribution des électrons permet de définir une température pour chaque population d'électrons (chauds et froids) à chaque instant et à chaque position. Pour les électrons chauds (resp. froids) nous obtenons :

$$k_B T_{h,c}(x, t) = \frac{m_e \int v^2 f_{h,c}(x, v, t) dv}{n_{h,c}(x, t)} \quad (7.14)$$

de sorte que la température moyenne des électrons chauds (resp. froids) est obtenue en intégrant  $T_{h,c}(x, t)$  sur toute la boîte de simulation, soit :

$$T_{h,c}(t) = \frac{\int n_{h,c}(x, t) T_{h,c}(x, t) dx}{\int n_{h,c}(x, t) dx} \quad (7.15)$$

Pour faciliter la discussion qui suit, on définit quelques paramètres physiques (on garde les mêmes notations que dans les chapitres précédents) référant à l'état initial du plasma et à un temps caractéristique de l'expansion :

$$y_u = n_{hu}/n_{cu}, \quad \alpha = T_{h0}/T_{c0}, \quad \text{et} \quad \tau = L/c_{sh0} \quad (7.16)$$

où  $c_{sh0} = (k_B T_{h0}/m)^{1/2}$  est la vitesse du son associée aux seuls électrons chauds. Ce temps caractéristique est équivalente à deux fois le temps que mettrait, en gardant sa vitesse initiale, l'onde de raréfaction pour atteindre le centre de la cible, pour un plasma avec une fonction de distribution en vitesse des électrons Maxwellienne.

## 7.2 Régimes d'expansion et aspects énergétiques

### 7.2.1 Régime de raréfaction des électrons chauds

Dans cette section, on considère la détente de plasmas dans lesquels les électrons chauds sont initialement très majoritaires,  $y_u \gg 1$ . Les électrons froids alors peuvent être considérés comme des « particules tests ».

#### Chauffage des électrons de basse énergie

Nous avons effectué des simulations numériques de la détente dans un vide d'une feuille de plasma de longueur initiale  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ , pour un rapport en densité  $y_u = 10^4$ , et pour des rapports en température allant de  $\alpha = 10$  à  $\alpha = 10^3$ . Les résultats de ces simulations sont présentés sur la figure 7.3. Plusieurs observations peuvent être faites.

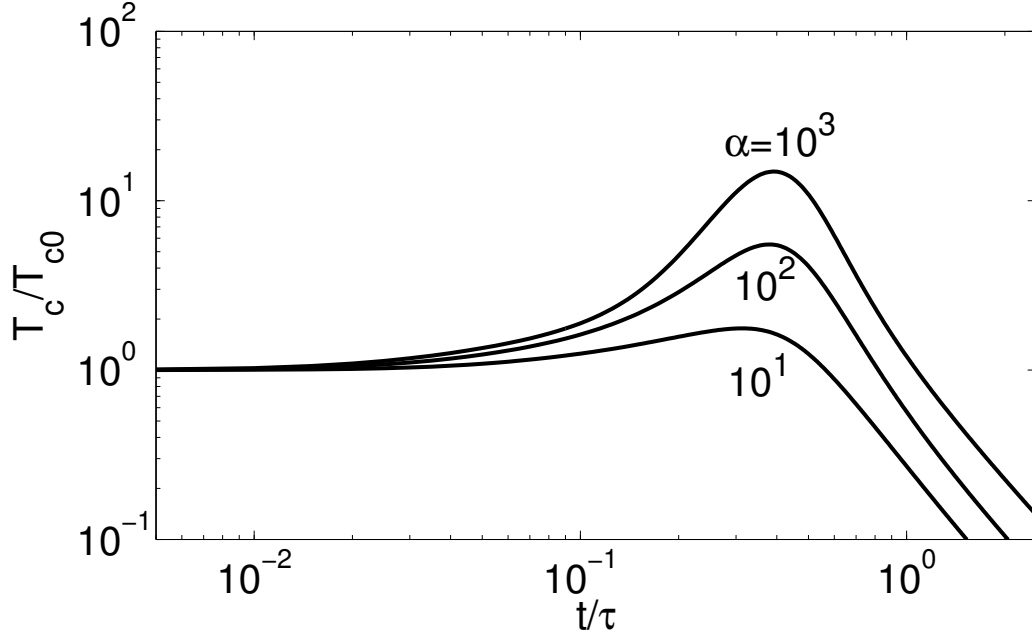
Premièrement, on constate un chauffage important des électrons froids durant la première phase de l'expansion. Cette amplification de la température des électrons froids est sensible au rapport en température dans la région non-perturbée du plasma,  $\alpha$ . En effet pour  $\alpha = 10^2$ , la température des électrons froids est multipliée par un facteur de l'ordre de 5, alors que ce dernier est de l'ordre de 15 pour  $\alpha = 10^3$ . Cette croissance en fonction du rapport initial en température  $\alpha$  peut s'expliquer par le fait que, le nombre de particules initialement dans le plasma étant conservé, l'énergie acquise par chaque électron froid augmente automatiquement avec  $\alpha$ .

Deux phases d'expansion peuvent être distinguées ; une première phase (pour  $t \leq 0.4\tau$ ) au cours de laquelle l'onde de raréfaction remonte vers le centre de la feuille de plasma. Cette phase s'accompagne d'une accélération de l'onde de raréfaction du fait de la déformation de la fonction de distribution initiale des électrons comme l'ont montré Grismayer *et al.* [13] dans le cas de l'expansion d'un plasma avec une population d'électrons ayant une fonction de distribution initialement Maxwellienne. Ensuite, (pour  $t \geq 0.4\tau$ ), on a une seconde phase de l'expansion où l'on assiste à un refroidissement des électrons froids.

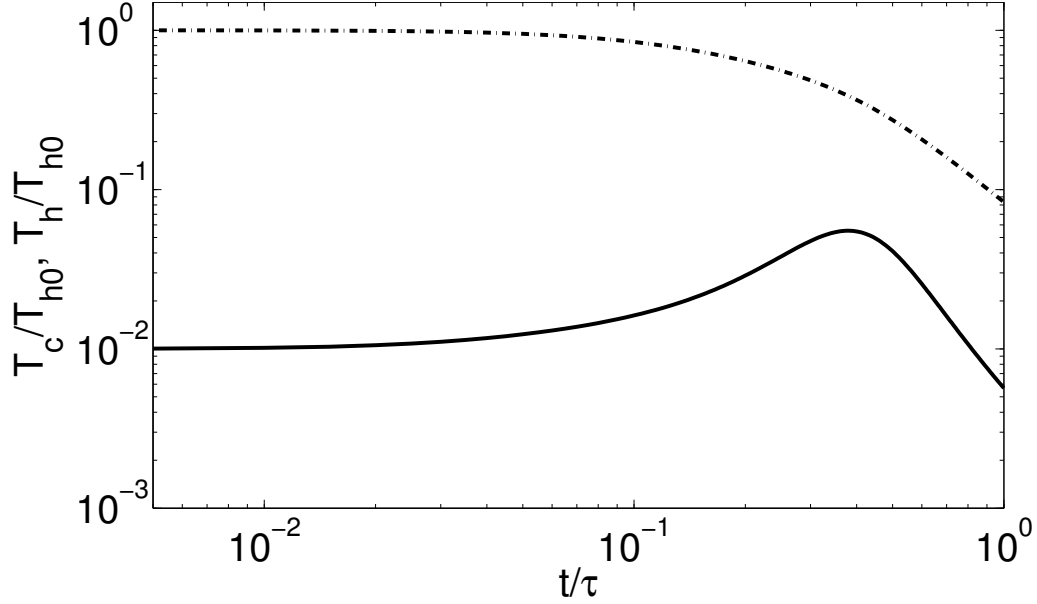
Par ailleurs, les électrons chauds se refroidissent dès le début de l'expansion, en transférant leur énergie aux ions. Ceci est illustré sur la figure 7.4, où l'on peut voir qu'au moment de l'arrivée de l'onde de raréfaction au centre de la cible (correspondant au maximum de gain en énergie pour les électrons froids) les électrons chauds ont perdu au moins la moitié de leur énergie initiale. Sur des temps d'expansion longs,  $t \gg \tau$ , les deux courbes se rapprochent.

Un autre paramètre du plasma initial qui est susceptible de peser sur le transfert d'énergie entre les électrons froids, les électrons chauds, et les ions est la longueur initiale du plasma. Pour regarder ceci en détail, on a effectué une série de simulations pour des plasmas de tailles initiales différentes :  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ ,  $L/2\lambda_{Dh0} = 100$ , et  $L/2\lambda_{Dh0} = 500$ . Les

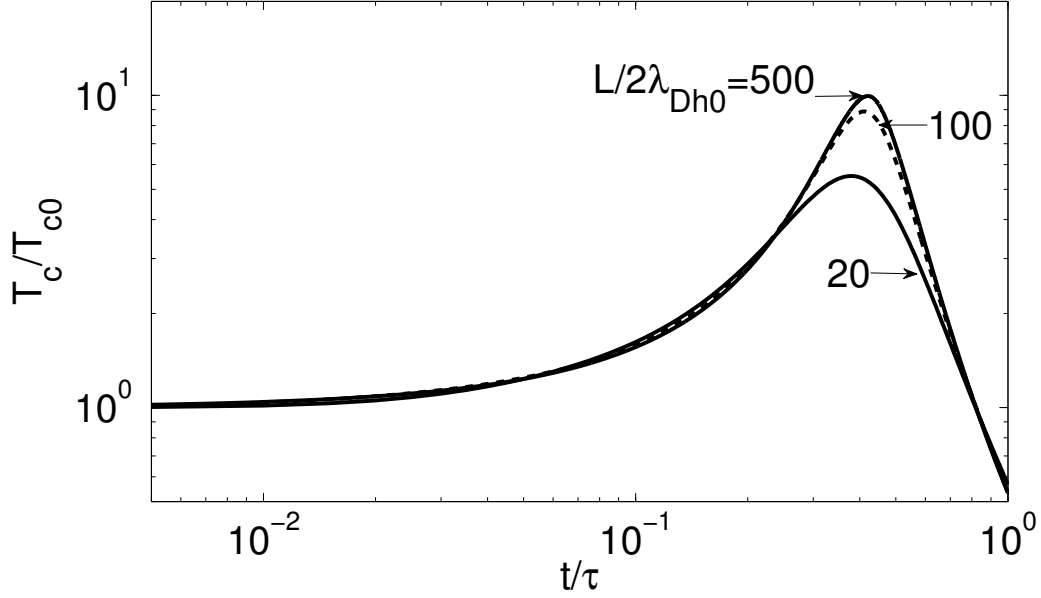




**FIGURE 7.3** – Variation de la température des électrons froids en fonction du temps. Les paramètres initiaux du plasma sont  $y_u = 10^4$ ,  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ , et  $\alpha = 10 - 10^3$ .



**FIGURE 7.4** – Variation de la température des électrons froids et des électrons chauds en fonction du temps pour  $y_u = 10^4$ ,  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ , et  $\alpha = 10^2$ .



**FIGURE 7.5** – Variation de la température des électrons froids en fonction du temps pour des plasmas de différentes longueurs initiales :  $L/2\lambda_{Dh0} = 20, 100$ , et  $500$ . Les paramètres initiaux du plasma sont  $y_u = 10^4$  et  $\alpha = 10^2$ .

résultats sont donnés sur la figure 7.5 où les paramètres du plasma ( $y_u$  et  $\alpha$ ) sont identiques à ceux de la figure 7.3. On voit clairement que le chauffage des électrons froids est d'autant plus significatif que la longueur initiale du plasma l'est également. En effet, on observe que pour des cibles épaisses ( $L \gg \lambda_{Dh0}$ ), les électrons de basse énergie voient leur température initiale multipliée par un facteur très important (pour  $L = 500\lambda_{Dh0}$  et  $\alpha = 10^2$ , le gain est de l'ordre 10). Cependant, la figure 7.3 montre une saturation de l'amplification pour des plasmas épais.

### Explication analytique du chauffage

Afin de trouver une explication du chauffage des électrons froids dans le plasma, on se propose d'établir une expression de leur température et de leur densité en fonction du temps à l'aide de calculs analytiques simples.

On s'intéresse uniquement ici à la phase initiale de la détente du plasma, au cours de laquelle nous avons  $\lambda_{Dh0} \ll c_{sh0}t \ll L$ . Dans ce régime, une expansion auto-semblable s'établit des deux côtés de la feuille de plasma. Par ailleurs, l'expansion étant largement dominée par les électrons chauds, le potentiel électrostatique peut donc s'écrire :

$$e\phi(x, t) \simeq -k_B T_{h0} [1 + (|x| - L/2) / c_{sh0}t] \quad (7.17)$$

L'expression de la variation de l'énergie d'un électron dans ce potentiel électrostatique

$\phi$  a été établie dans les Refs. [62, 13, 14]. Dans la limite  $\mathcal{E}(t) \ll k_B T_{h0}$ , celle-ci s'exprime par la relation :

$$\Delta\mathcal{E} \simeq -2e \int_0^{x_r} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\Phi}} \quad (7.18)$$

$$\simeq 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{m_e}{m}} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{h0}}} k_B T_{h0} \quad (7.19)$$

avec  $x_r$  le point tournant de l'électron dans le potentiel.

La demi période d'un électron à l'intérieur de ce potentiel auto-semblable est donnée par :

$$\Gamma \simeq 2\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{-L/2}^{x_r} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\Phi}} \quad (7.20)$$

où encore en introduisant  $-c_s t$  dans l'intégrale :

$$\Gamma \simeq 2\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{-L/2}^{-c_s t} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\Phi}} + 2\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{-c_s t}^{x_r} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} + e\Phi}} \quad (7.21)$$

On peut directement intégrer le premier terme de  $\Gamma$  vu que le potentiel est nul dans la région non perturbée du plasma, on obtient :

$$I_1 \simeq 2\sqrt{\frac{m_e}{2\mathcal{E}}} (L/2 - c_s t) \simeq \sqrt{\frac{m_e}{2\mathcal{E}}} L \quad (7.22)$$

L'intégration du second terme de  $\Gamma$  nous donne :

$$I_2 \simeq 4\sqrt{\frac{m_e}{2}} \frac{c_{sh0} t}{k_B T_{h0}} \left[ \sqrt{\mathcal{E} + e\Phi} \right]_{-c_s t}^{x_r} \quad (7.23)$$

$$\simeq 2\sqrt{\frac{2m_e}{m}} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{h0}}} t \quad (7.24)$$

En additionnant les termes  $I_1$  et  $I_2$ , il vient :

$$\Gamma \simeq \sqrt{\frac{m_e}{2\mathcal{E}}} L + 2\sqrt{\frac{2m_e}{m}} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{h0}}} t \quad (7.25)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{m_e}{2\mathcal{E}}} L \left[ 1 + \frac{c_{sh0} t}{L} \frac{\mathcal{E}}{k_B T_{h0}} \right] \quad (7.26)$$

Une simplification supplémentaire peut être effectuée dans la limite  $\mathcal{E} \ll k_B T_{h0}$  et  $L \gg c_{sh0} t$ . La relation (7.26) devient alors :

$$\Gamma \simeq \sqrt{\frac{m_e}{2\mathcal{E}}} L \quad (7.27)$$

Connaissant la variation de l'énergie d'un électron et la durée de son transit à l'intérieur du potentiel, le taux de variation de l'énergie de l'électron prend alors la forme suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \simeq \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Gamma} \simeq 4 \frac{\mathcal{E}}{\tau} \quad (7.28)$$

On peut exprimer l'énergie d'un électron de basse énergie  $\mathcal{E}(t)$  en fonction de son énergie initiale  $\mathcal{E}_0$ , à l'ordre le plus bas en temps  $t$  ; on obtient ainsi :

$$\mathcal{E}(t) \simeq \left(1 + 4 \frac{t}{\tau}\right) \mathcal{E}_0 \quad (7.29)$$

ou encore en prenant l'inverse de cette relation :

$$\mathcal{E}_0 \simeq \left(1 - 4 \frac{t}{\tau}\right) \mathcal{E}(t) \quad (7.30)$$

Il est maintenant possible de calculer la fonction de distribution des électrons. Nous utilisons le fait que la fonction de distribution de chaque particule se conserve le long de sa trajectoire. La fonction de distribution des électrons de basse énergie est initialement une Maxwellienne, on peut donc l'écrire :

$$f_c(x, \mathcal{E}_0, t = 0) \simeq n_{cu} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{c0}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0}{k_B T_{c0}}\right) \quad (7.31)$$

On reporte ensuite (7.30) dans (7.31), on a

$$f_c(x, \mathcal{E}, t) \simeq f_{c0}(\mathcal{E}) \exp\left(\frac{4 \mathcal{E}}{k_B T_{c0}} \frac{t}{\tau}\right) \quad (7.32)$$

Dans la limite  $t \gg \tau$  (et  $\mathcal{E} \ll k_B T_{c0}$ ), on peut procéder à un développement limité au premier ordre en  $t/\tau$  de (7.32). La fonction de distribution des électrons dans la région intérieure de la feuille de plasma ( $|x| + c_{sh0}t < L/2$ ) s'exprime alors :

$$f_c(x, v, t) \simeq \left(1 + \frac{2m_e v^2}{k_B T_{c0}} \frac{t}{\tau}\right) f_{c0}(v) \quad (7.33)$$

On cherche maintenant une estimation des expressions de la densité et de la température des électrons froids. Pour cela, on intègre (7.33) en fonction de la vitesse pour obtenir la densité, et pour la température on multiplie d'abord (7.33) par la vitesse avant de procéder à son intégration, ensuite on la divise par la densité des électrons froids. On obtient alors :

$$n_c(t) \simeq n_{c0} (1 + 2 t/\tau) \quad (7.34)$$

et

$$T_c(t) \simeq T_{c0} (1 + 4 t/\tau) \quad (7.35)$$

Ces deux résultats montrent que les électrons froids subissent une compression adiabatique de la part du potentiel électrostatique avec une température donnée par la loi de Laplace  $T_c \propto n_c^{\gamma-1}$  où le coefficient polytropique  $\gamma$  vaut 3.

La formule (7.35) est représentée sur la figure 7.6 pour  $\alpha = 10^2$ . Afin de vérifier la validité de celle-ci, les résultats de simulations obtenus pour des paramètres plasmas suivants  $y_u = 10^4$ ,  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  et  $L/2\lambda_{Dh0} = 100$  sont également montrés sur cette figure. L'accord avec les simulations est très bon au début de l'expansion, plus précisément sur des temps  $t/\tau \leq 10^{-1}$ . Celui-ci devient moins satisfaisant au delà.

Pour aller plus loin dans l'interprétation du chauffage des électrons de basse énergie, nous considérons que les électrons froids sont confinés par le potentiel électrostatique dans la zone non encore parcourue par l'onde de raréfaction. On peut estimer la longueur de cette région à :

$$L_c(t) \simeq L - 2c_{sh0}t = L (1 - 2 t/\tau) \quad (7.36)$$

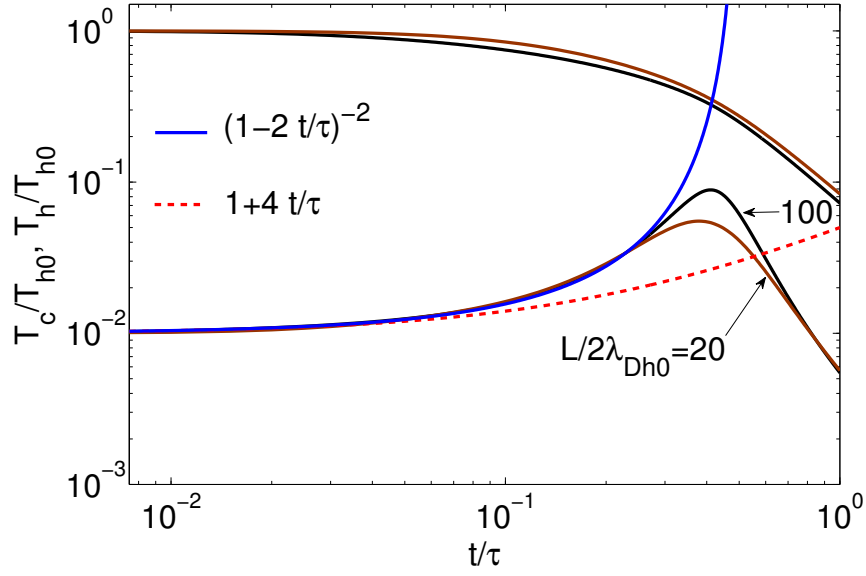
D'autre part, la densité des électrons froids peut être exprimée à partir du rapport entre  $L_c(t)$  et la longueur initiale du plasma  $L_c(0) = L$ , soit :

$$n_c(t) \simeq n_{c0} \frac{L}{L_c} \simeq \frac{n_{c0}}{1 - 2 t/\tau} \quad (7.37)$$

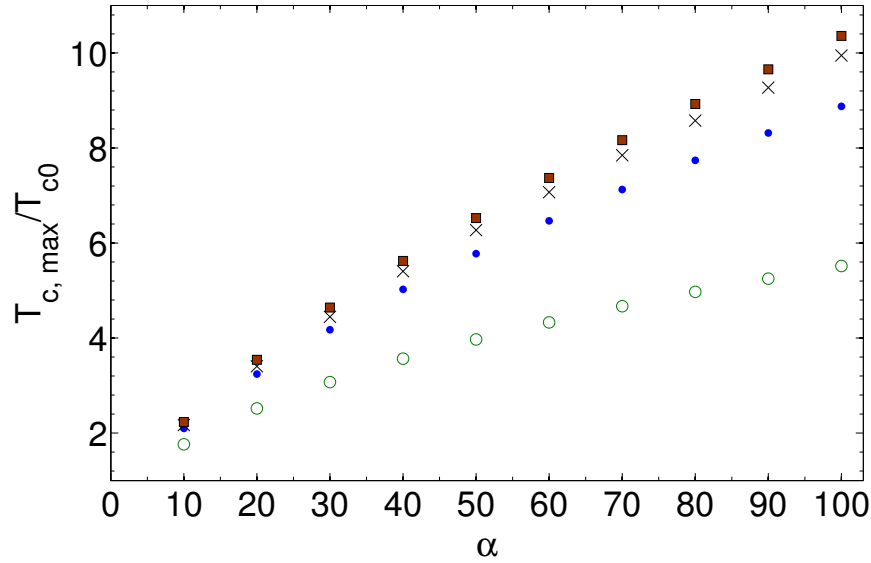
On reporte cette dernière relation dans la loi de Laplace, pour obtenir une nouvelle expression de la température des électrons froids sous la forme :

$$T_c(t) \simeq \frac{T_{c0}}{(1 - 2 t/\tau)^2} \quad (7.38)$$

Tout d'abord remarquons que le résultat du développement de Taylor de l'équation (7.38) au premier ordre en puissance de  $t/\tau$ , coïncide avec (7.35). Ces deux résultats analytiques sont représentés sur la figure 7.6, et comparés avec ceux obtenus grâce aux simulations numériques effectuées pour des feuilles de plasma de différentes tailles initiales. L'accord obtenu est très bon sur des temps précédant l'arrivée de l'onde de raréfaction au centre de la cible. Lorsque cette dernière s'approche du centre du plasma, l'expression obtenue pour la densité des électrons (7.37) diverge, ainsi l'analyse effectuée ci-dessus devient invalide. Reste que cet analyse est très satisfaisante, dans le sens où lorsque l'onde de raréfaction atteint le centre du plasma, on assiste à un dés-assemblage de la feuille de plasma. L'amplification de la température des électrons froids s'arrête, et ces derniers commencent à perdre leur énergie en faveur des ions.



**FIGURE 7.6** – Température des électrons en fonction du temps. On a représenté ici les résultats des simulations pour un plasma de taille initiale  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  (courbes marrons) et  $L/2\lambda_{Dh0} = 100$  (courbes noires). La courbe en tirets rouges correspond à la formule (7.35), alors que la courbe bleue représente la formule (7.38). Les paramètres initiaux sont  $y_u = 10^4$  et  $\alpha = 10^2$ .



**FIGURE 7.7** – Gain maximal en température des électrons froids en fonction de  $\alpha$  pour des plasmas de différentes tailles initiales  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  (cercles),  $L/2\lambda_{Dh0} = 100$  (points) et  $L/2\lambda_{Dh0} = 500$  (croix) et pour  $y_u = 10^4$ . Les carrés représentent le résultat de la formule (7.42).

## Gain maximum des électrons de basse énergie

On se propose ici d'estimer le facteur maximum d'amplification de la température des électrons froids en fonction du rapport initial en température  $\alpha$ . Tout d'abord on suppose que lorsque l'onde de raréfaction arrive au centre de la cible, l'expression du potentiel électrostatique (7.17) reste encore valable à condition de remplacer  $T_{h0}$  par la température  $T_h$  mesurée à cet instant. On constate (voir figure 7.6) qu'à l'instant  $t = \tau/2$  où la température des électrons froids atteint son maximum, celle des électrons chauds est réduite à près du tiers de sa valeur initiale, soit

$$T_h(t = \tau/2) \simeq \frac{T_{h0}}{3} \quad (7.39)$$

L'expression du potentiel électrostatique (7.17) devient alors :

$$e\Phi(x, t = \tau/2) \simeq -\frac{2}{3} k_B T_{h0} \frac{|x|}{L} \quad (7.40)$$

La longueur minimum d'extension de la couche d'électrons froids  $L_{c,min}$  est estimée à partir de la condition

$$e |\Phi(L_{c,min}/2)| \simeq k_B T_{c,max} \quad (7.41)$$

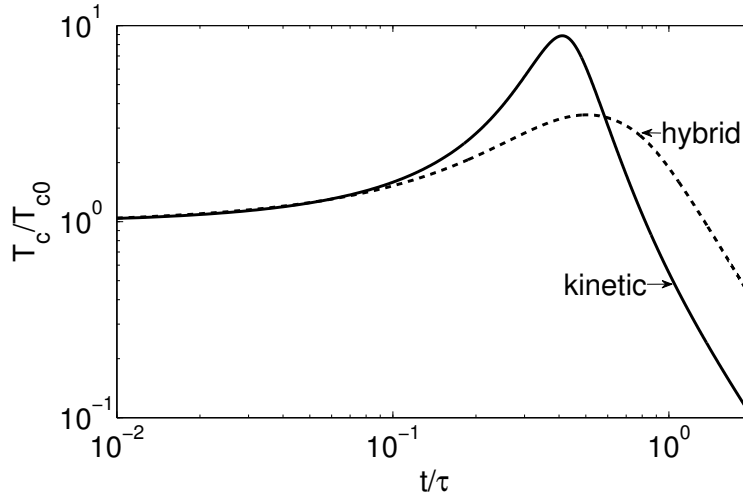
avec  $T_{c,max}$  la température maximale des électrons froids. Ensuite, on reporte cette équation dans (7.40), puis utilisant (7.37), on obtient l'expression de la température maximale des électrons froids :

$$k_B T_{c,max} \simeq k_B T_{c0} \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{2/3} \quad (7.42)$$

On observe clairement sur la figure 7.7 que ce résultat (7.42) est en très bon accord avec les simulations numériques effectuées avec des plasmas dont la longueur initiale est  $L/2\lambda_{Dh0} \geq 100$ . Pour des plasmas plus minces, il apparaît que l'on sous-estime ce facteur d'amplification. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'expression du potentiel électrostatique (7.17) utilisée ci-dessus n'est plus valable.

L'explication du mécanisme de chauffage des électrons de basse énergie que nous avons présentée ci-dessus nous permet de penser que l'amplification de leur température n'est pas spécifique au modèle cinétique de l'expansion, puisque, comme nous l'avons vu, celle-ci est due à une compression adiabatique de la couche d'électrons froids par le potentiel électrostatique. Pour l'illustrer, nous avons effectué des simulations avec un code hybride [8], qui prend en compte les effets de séparation de charges, et dans lequel la fonction de distribution des électrons (chauds et froids) reste figée à une bi-Maxwellienne au cours de l'expansion contrairement au modèle cinétique où la dynamique de cette dernière est gouvernée par l'équation de Vlasov. Les résultats obtenus avec les deux modèles sont

comparés sur la figure 7.8; on voit que le chauffage des électrons de basse énergie est présent dans les deux modèles. En revanche, le modèle hybride sous-estime la température maximale que peuvent atteindre les électrons froids.



**FIGURE 7.8** – Températures des électrons froids obtenues avec le modèle cinétique (ligne continue) et le modèle hybride (tirets) pour les paramètres suivants  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ ,  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^4$ .

Dans la suite de cette thèse, on restreint nos simulations aux paramètres plasma suivants :  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  et  $\alpha = T_{h0}/T_{c0} = 10^2$ .

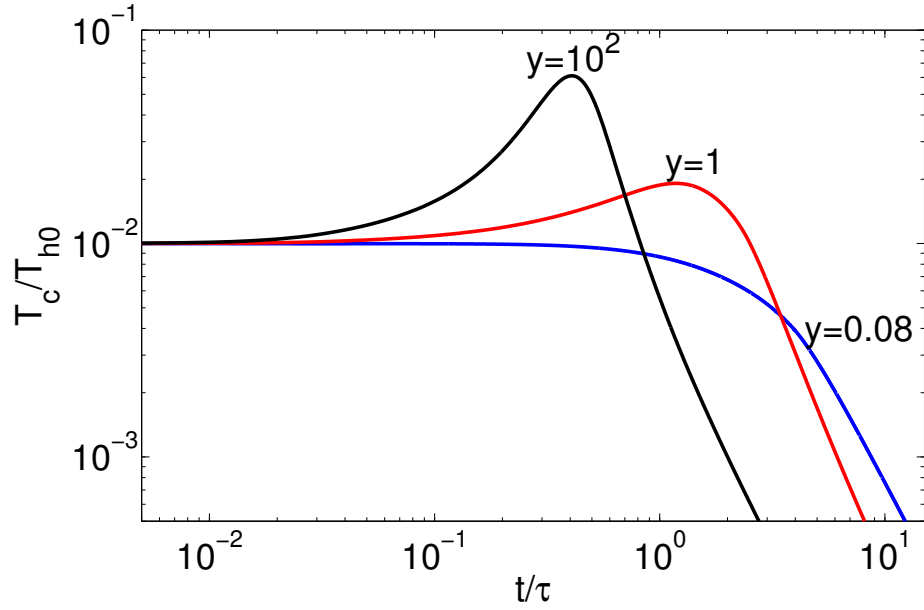
## 7.2.2 Régime d'expansion supersonique

Comme on pouvait s'y attendre pour des plasmas avec une proportion d'électrons chauds moins importante, le chauffage des électrons de basse énergie évoqué dans la section précédente diminue considérablement. La figure 7.9 montre la variation de la température des électrons froids en fonction du temps pour divers rapports initiaux en densités. Pour  $y_u = 10^2$  et  $y_u = 1$ , on constate que le chauffage des électrons froids est toujours présent. Le choc de raréfaction comprime et chauffe les électrons froids, dans un processus identique à celui discuté précédemment. Cependant, la température maximale  $T_{c,max}$  des électrons est nettement réduite par rapport aux valeurs obtenues dans la section précédente. La raison de cette diminution du chauffage des électrons de basse énergie peut, en partie, s'expliquer par le fait que  $T_h$  a davantage décru quand le choc de raréfaction arrive au centre de la cible (pour  $y_u \leq 1$ ).

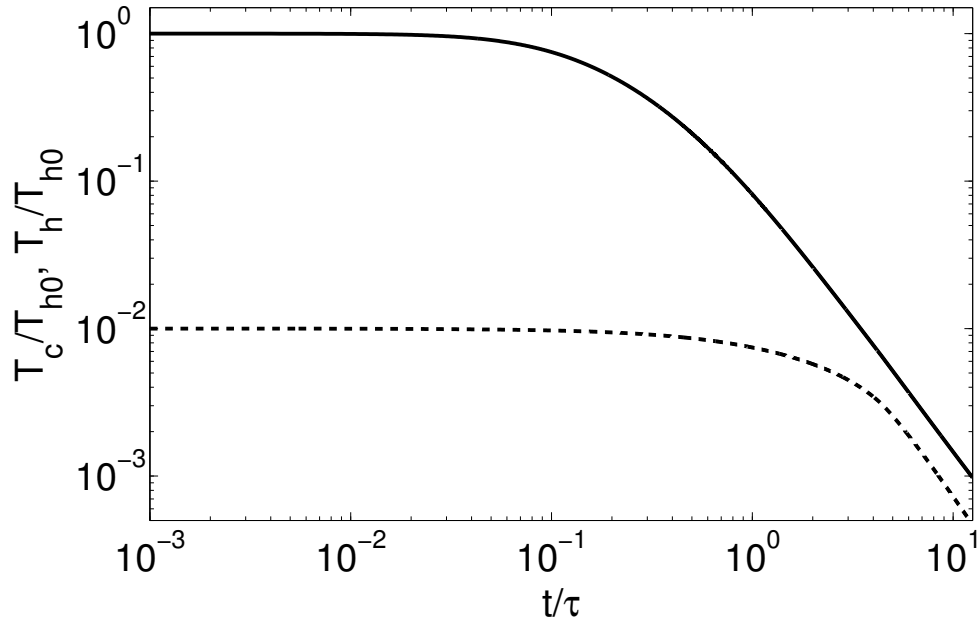
Pour  $y_u = 8 \times 10^{-2}$ , on observe, au début de la détente ( $t \leq \tau$ ), que la température des électrons froids est quasi-constante. Au delà ( $t > \tau$ ), on assiste à un refroidissement des électrons de basse énergie du plasma. En effet, dans ce régime le choc de raréfaction se trouve quasi-stationnaire à la position  $\xi_S = 0$ , et du fait de l'expansion la valeur instantanée du rapport de densité  $y_u$  décroît entraînant ainsi un déplacement du choc vers le vide. En



l'absence du phénomène de compression, les électrons froids perdent leur énergie lors de l'expansion en faveur des ions, tout comme les électrons chauds.



**FIGURE 7.9** – Variation de la température des électrons froids en fonction du temps pour  $y_u = 10^2$ ,  $y_u = 10^0$  et  $y_u = 8 \times 10^{-2}$ . Les paramètres initiaux du plasma sont :  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  et  $\alpha = 10^2$ .



**FIGURE 7.10** – Température des électrons froids et des électrons chauds en fonction du temps pour les paramètres plasma suivants :  $y_u = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^2$  et  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .

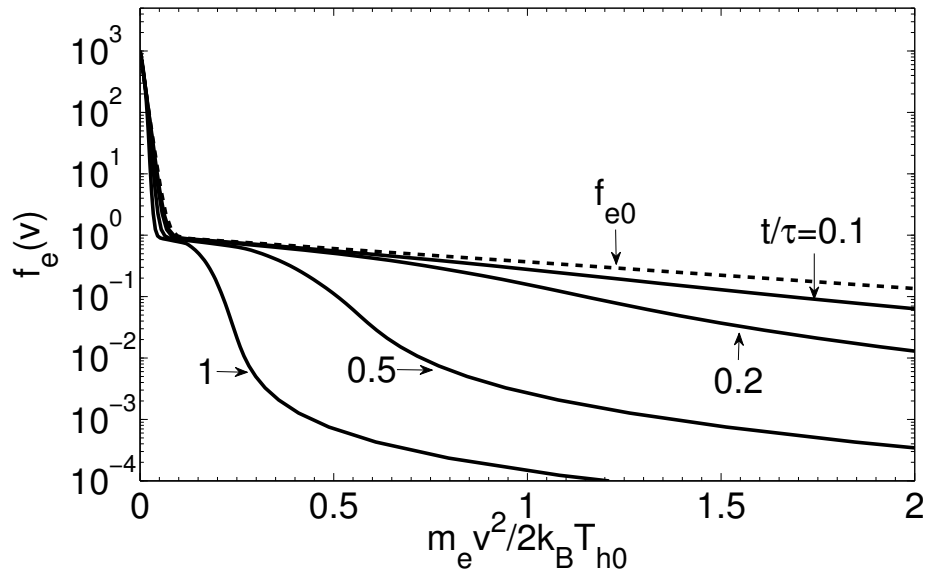
### 7.2.3 Régime d'expansion standard

Nous nous intéressons dans cette partie aux plasmas avec des rapports initiaux en densité  $y_u$  très faibles. Ces plasmas sont identiques à ceux qui peuvent être obtenus lors de l'interaction d'un laser ultra-intense avec la matière.

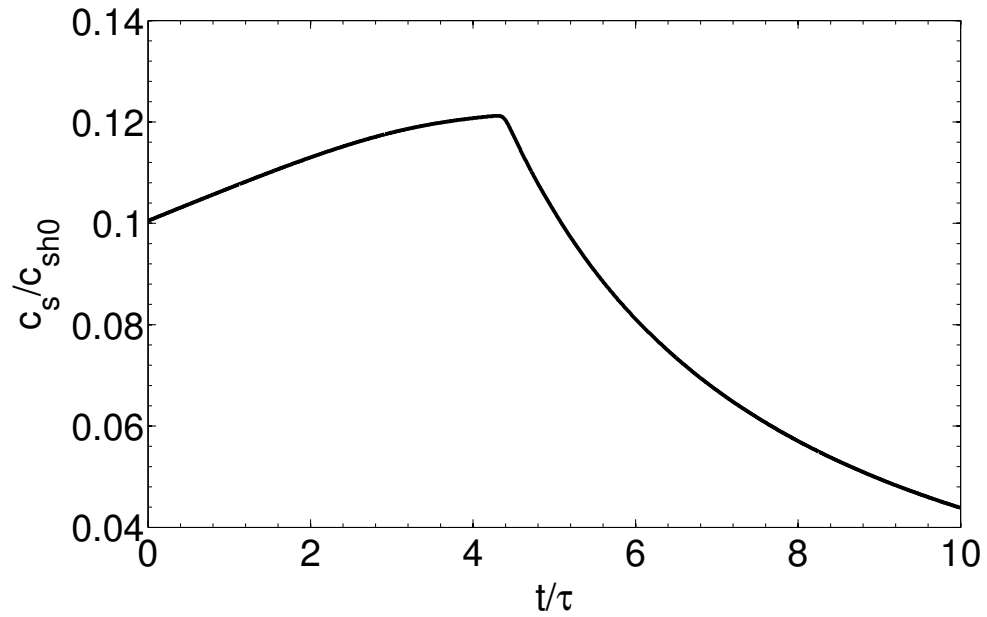
#### Refroidissement global des électrons

Nous considérons ici l'expansion d'une feuille de plasma de taille initiale  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  avec les rapports initiaux en température et en densité suivants  $\alpha = 10^2$  et  $y_u = 10^{-2}$ . Ces paramètres sont identiques à ceux du cas standard du chapitre 5. Les résultats de cette simulation sont illustrés sur la figure 7.10 avec l'évolution temporelle de la température des électrons froids et chauds. On observe un refroidissement général des électrons froids et des électrons chauds. Cependant, les électrons chauds perdent plus rapidement leur énergie que les électrons froids. En effet, le temps caractéristique de variation de l'énergie des électrons de haute énergie est typiquement de l'ordre de  $\tau$ , alors que pour les électrons de basse énergie le refroidissement débute plus tard, son échelle de variation est de l'ordre de  $\tau\sqrt{\alpha}$ . Ceci s'explique par le fait que la vitesse de l'onde de raréfaction est ici de l'ordre  $c_{s0} \approx c_{sh0}/\sqrt{\alpha}$ . Sur des temps d'expansion assez longs  $t/\tau \gg 1$ , les deux courbes ont tendance à se rapprocher du fait du comportement de la température des électrons sous la forme  $T_{h,c} \propto t^{-2}$ .

La figure 7.11 montre la distribution en vitesse des électrons prise au centre de la cible  $x = 0$ , pour les mêmes paramètres plasma que la figure 7.10 et à différents instants de l'expansion. Les distorsions dont fait l'objet la fonction de distribution pour  $t < \tau$  sont principalement réservées aux régions de très hautes vitesses. Pour  $t \geq \tau$ , la distribution en vitesses des électrons, initialement bi-Maxwellienne, évolue vers une structure en forme de chapeau « top-hat ». On observe aussi que la pente de la queue de la fonction de distribution évolue très peu dans le temps. Ces déformations de la fonction de distribution des électrons entraînent une accélération de l'onde de raréfaction comme l'ont démontré Mora & Grismayer [14] dans le cas d'un plasma avec une seule population d'électrons Maxwellienne. L'évolution de la vitesse du son en fonction du temps correspondant aux paramètres de la figure 7.11 est représentée sur la figure 7.12. Le point anguleux sur la courbe correspond à l'arrivée de l'onde de raréfaction au centre du plasma.



**FIGURE 7.11** – Fonction de distribution en vitesses des électrons normalisée à  $f_{h0}$  prise au centre de la cible à différents instants. Les paramètres plasma sont identiques à ceux la figure 7.10.

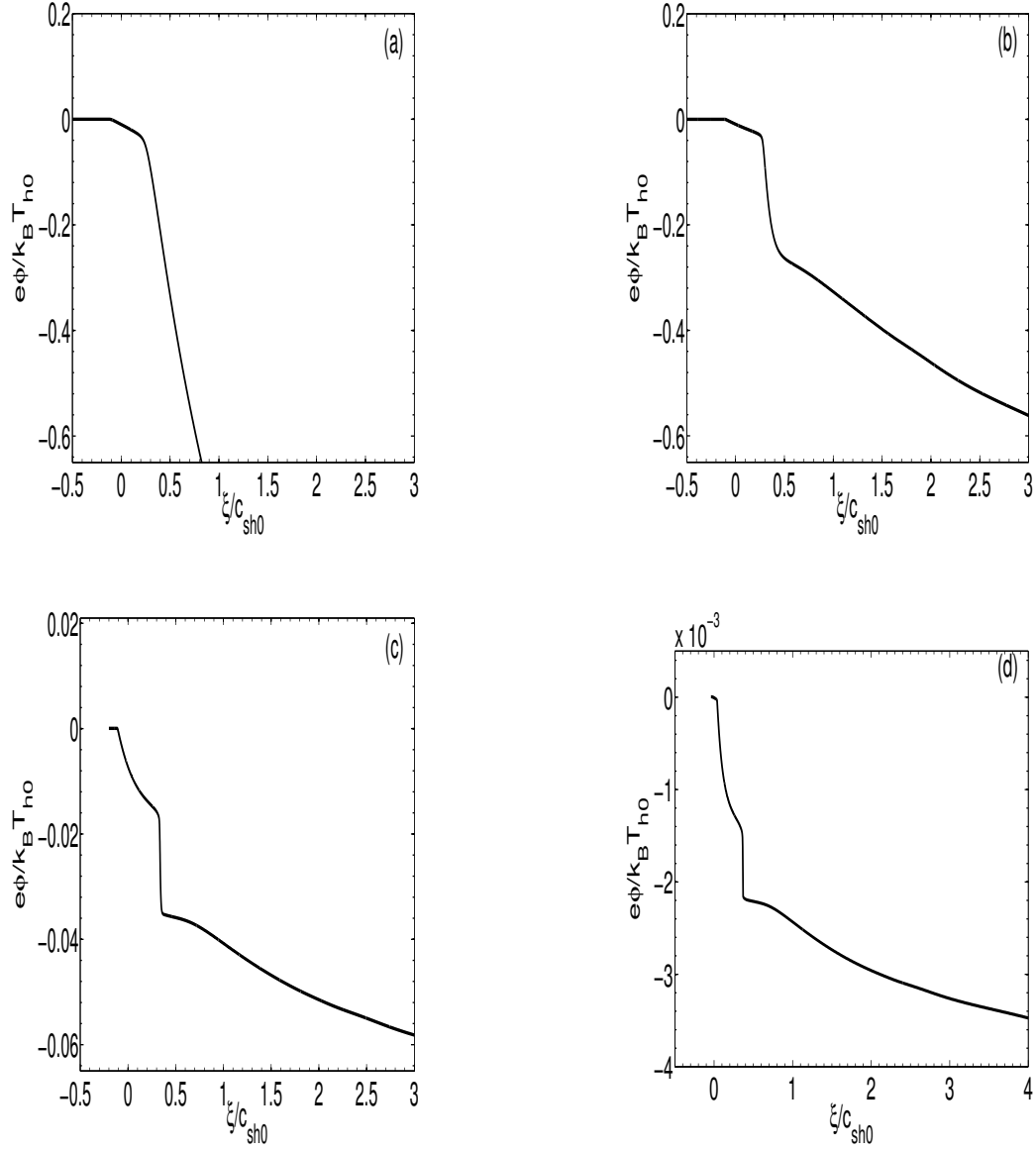


**FIGURE 7.12** – Vitesse du son au centre de la cible en fonction du temps. Les paramètres plasma sont ceux de la figure 7.11.

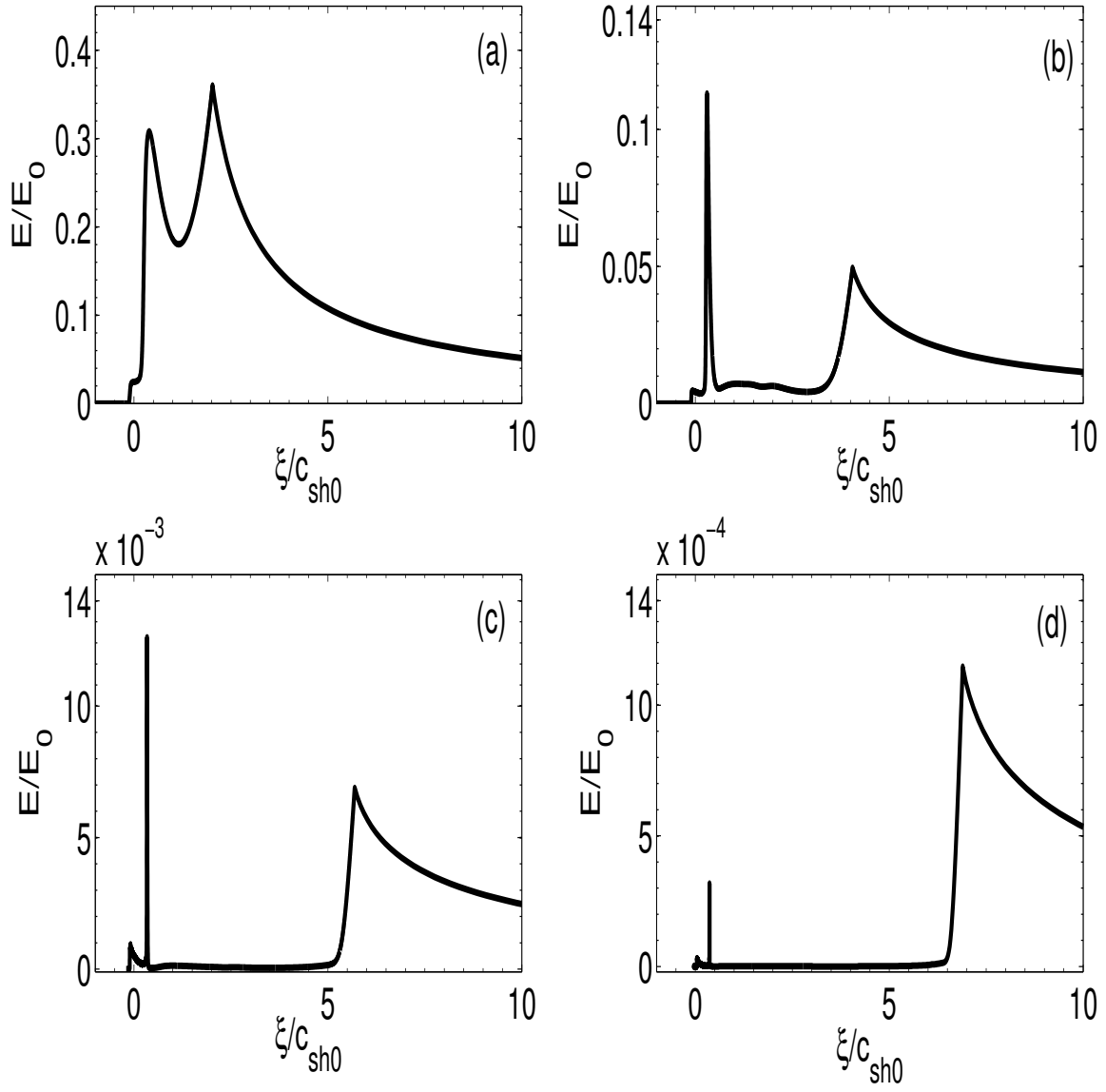
## Profils spatiaux

Pour regarder l'évolution temporelle de la structure du choc de raréfaction, nous avons représenté sur la figure 7.13 le profil spatial du potentiel électrostatique à différents instants  $t = 5\tau$ ,  $20\tau$ ,  $100\tau$ , et  $500\tau$ , pour les paramètres plasma suivants :  $y_u = 10^{-2}$  et  $\alpha = 10^2$ . La structure de l'écoulement est similaire à la description faite pour le cas standard discuté au chapitre 5. Sur la figure 7.13(a), au temps  $t = 10^{-1}\tau$ , on distingue : le plasma non perturbé à gauche, puis la région d'expansion des électrons froids suivie de la région d'expansion des électrons chauds. Le choc de raréfaction apparaît clairement sur la structure d'expansion du plasma, même s'il faut attendre un certain temps afin que celui-ci se forme. En revanche, son amplitude décroît nettement avec le temps, comme on peut le constater sur les figures 7.13(b), (c), et (d). Ainsi au temps  $t = 12.5\tau$ , la valeur du saut en potentiel est réduite d'un facteur de l'ordre de  $10^3$  par rapport à la valeur obtenue dans le cas d'un plasma semi-infini. Cette réduction est attribuée au refroidissement des électrons chauds, puisque comme le montre la figure 7.10, la valeur de  $T_h(t)$  à cet instant vaut  $\sim 10^{-3} T_{h0}$ . De plus, le plateau observé dans le modèle semi-infini disparaît de la structure de l'expansion.

La figure 7.14 montre le profil spatial du champ électrique pour des paramètres identiques à ceux de la figure 7.13. Le champ électrique est normalisé à  $E_0 = (n_{h0}k_B T_{h0}/\epsilon_0)^{1/2}$ . Nous observons deux pics sur ce profil correspondant au choc de raréfaction (à gauche) et au front d'ions (à droite). Contrairement au modèle semi-infini, on constate ici que la position de pic associé au choc n'est pas indépendante du temps, mais se déplace très lentement vers la région du vide. La largeur et l'amplitude du pic du choc de raréfaction diminuent très rapidement avec le temps. Enfin, on note que l'amplitude du pic du champ électrique au niveau du front d'ions décroît plus vite que  $2E_0/\omega_{pih}t$ , qui est la valeur obtenue dans le cas de l'expansion d'un plasma semi-infini, ce qui résulte du fait que la température chaude décroît dans le temps.



**FIGURE 7.13** – Profils du potentiel électrostatique en fonction de  $\xi$ , aux temps (a)  $t = 10^{-1} \tau$ , (b)  $t = 0.5 \tau$ , (c)  $t = 2.5 \tau$ , et (d)  $t = 12.5 \tau$ . Les paramètres initiaux sont :  $\alpha = 10^2$ ,  $y_u = 10^{-2}$ , et  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .



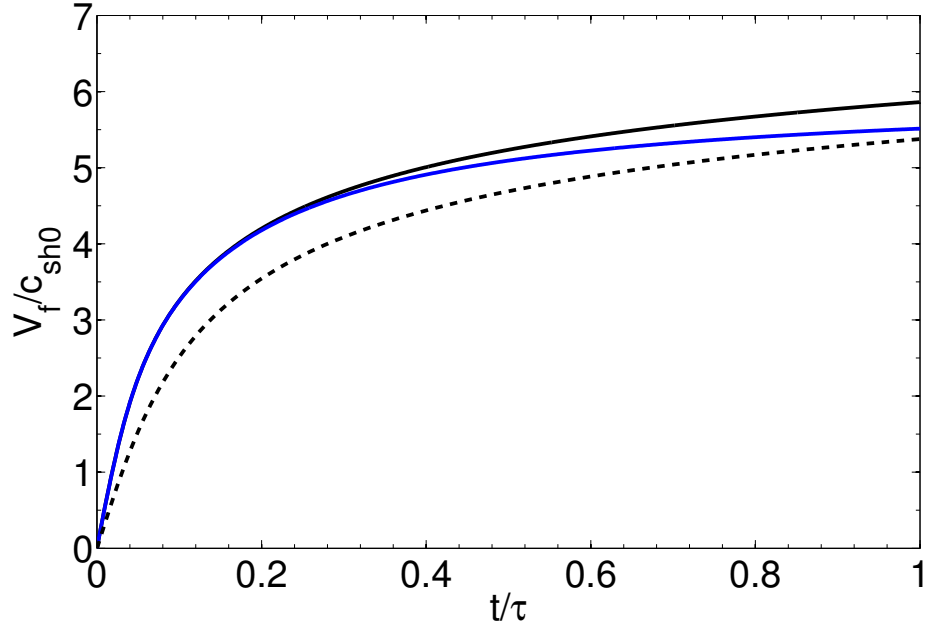
**FIGURE 7.14** – *Profils du champ électrique en fonction de  $\xi$  aux temps (a)  $t = 10^{-1} \tau$  (b)  $t = 0.5 \tau$  (c)  $t = 2.5 \tau$  et (d)  $t = 12.5 \tau$ . Les paramètres du plasma sont :  $\alpha = 10^2$ ,  $y_u = 10^{-2}$  et  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .*

## 7.2.4 Accélération des ions

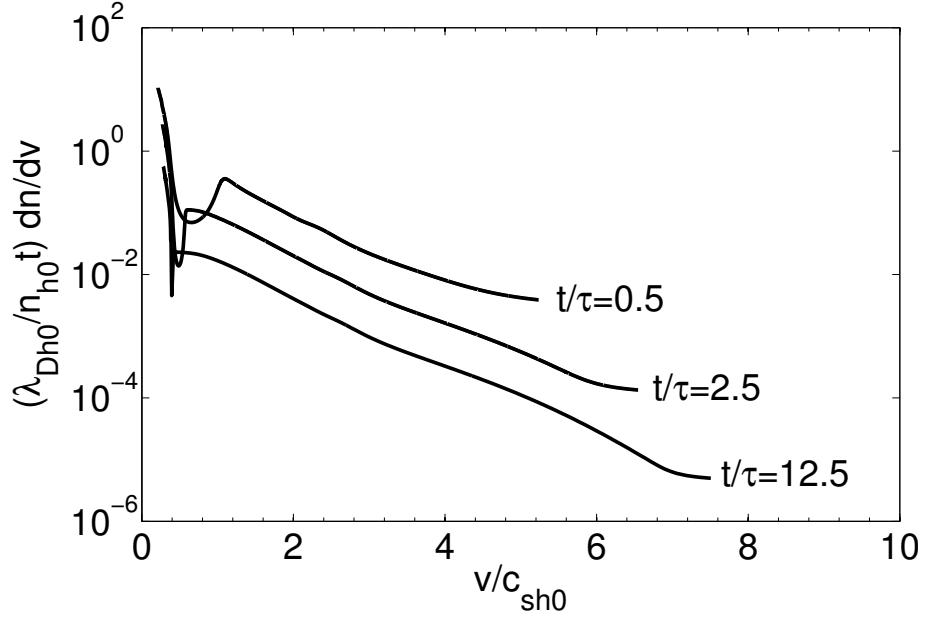
Après avoir traité les conséquences de la présence simultanée des électrons de basse et de haute énergie dans le plasma sur la structure d'expansion du plasma, en étudiant les différents régimes d'expansion, nous allons maintenant nous intéresser à leurs effets sur l'accélération des ions.

La figure 7.15 représente la vitesse du front d'ions en fonction du temps, fournie par le modèle cinétique et le modèle hybride pour un plasma avec les paramètres initiaux suivants  $y_u = 10^{-2}$  et  $\alpha = 10^2$ . Le résultat pour un plasma avec une seule population d'électrons initialement Maxwellienne y est également représenté. On remarque d'abord que dans les plasmas à deux températures d'électrons, la vitesse du front d'ions est légèrement plus importante. Ce qui s'explique par le fait que la présence des électrons de basse énergie augmente le champ électrique initial et par conséquent la vitesse des ions. Par ailleurs, le modèle hybride sous-évalue la vitesse du front d'ions.

Une caractéristique du spectre des ions mesuré lors des expériences est la structure en exponentielle de la vitesse de celui-ci. Néanmoins si on prend en compte la présence des électrons de basse énergie dans le plasma, la structure du spectre change complètement avec la présence d'un creusement séparant les régions d'expansion (en exponentielle) des électrons froids et des chauds. Le spectre des ions est représenté sur la figure 7.16 à différents instants  $\omega_{pih}t = 20, 100$  et  $1000$  et pour les paramètres du plasma suivant  $y_u = 10^{-2}$  et  $\alpha = 10^2$ . On voit que la profondeur et la largeur du creusement présentes sur le spectre diminuent très vite, alors que celles-ci ont plutôt tendance à croître avec le temps dans le modèle de plasma semi-infini. Le refroidissement des électrons lors de l'expansion fournit un élément d'explication à cela. Par ailleurs, la fonction  $\delta$ -Dirac sur le spectre des ions et qui correspond au plateau observé dans le cas d'une expansion d'un plasma semi-infini, disparaît également du spectre.



**FIGURE 7.15** – Vitesse du front d’ions en fonction du temps pour  $y_u = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^2$  et  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ . Courbe noire : code cinétique ; courbe bleue : code hybride ; courbe en tirets : code cinétique pour un plasma avec une seule espèce d’électrons.



**FIGURE 7.16** – Spectre en vitesse des ions à  $t = 0.5\tau$ ,  $2.5\tau$  et  $100\tau$ . Les paramètres plasma sont ceux de la figure 7.12.



## 7.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'expansion d'une feuille mince composée de deux populations d'électrons dont la fonction de distribution initiale des vitesses est bi-Maxwellienne, et d'une espèce d'ions. Avec un code cinétique 1-D non collisionnel et non-relativiste, nous nous sommes intéressés d'abord aux transferts d'énergies entre les électrons froids, les électrons chauds, et les ions, puis à l'évolution de la structure du choc de raréfaction

Pour des plasmas composés d'électrons chauds  $y_u \gg 1$ , c'est-à-dire les régimes supersonique et de raréfaction des électrons chauds, l'expansion se fait en deux phases : une première phase ( $t < \tau/2$ ) coïncidant avec l'accélération de l'onde de raréfaction vers le centre du plasma, et une deuxième phase ( $t > \tau/2$ ) au cours de laquelle le plasma se désassemble. Nous avons démontré que les électrons froids subissent un chauffage très important, au cours de la phase initiale de l'expansion. Ce chauffage initial est dû à une compression adiabatique des électrons froids par le potentiel électrique associé à l'onde de raréfaction. Une expression de la température de ces électrons dans ce régime a été établie. Pour des plasmas de tailles épaisses ( $L/2\lambda_{Dh0} \geq 100$ ), le gain maximum en température est un facteur de l'ordre de  $(\alpha/3)^{2/3}$  où  $\alpha$  est le rapport initial de la température chaude à la température froide. Lorsque l'onde de raréfaction arrive au centre du plasma ( $t \simeq \tau/2$ ), les électrons froids commencent à se refroidir en transférant leur énergie aux ions. Par ailleurs, les électrons froids étant très minoritaires dans le plasma, il n'est pas étonnant que la structure de l'expansion soit similaire à celle que l'on peut observer dans le cas de l'expansion d'un plasma avec une seule population d'électrons. Pour des valeurs du rapport en densité  $y_u \geq 0.8/\sqrt{\alpha}$ , un choc de raréfaction apparaît dans le plasma. Celui-ci se propage vers la région non perturbée du plasma contribuant ainsi à une compression de la couche d'électrons froids. L'amplification de la température des électrons froids est néanmoins nettement réduite.

Pour  $y_u \leq 0.8/\sqrt{\alpha}$  ; des rapports en densité plus proches de la réalité expérimentale, le choc de raréfaction se déplace vers la région du vide empêchant toute compression des électrons froids par le champ électrique. On observe alors un refroidissement global des électrons (froids et chauds) abaissant du coup le rapport effectif de la température  $\alpha$ . Cependant, les électrons chauds perdent leur énergie plus rapidement que les électrons froids, avec des temps caractéristiques de refroidissement de  $\tau$  pour les chauds et  $\tau\sqrt{\alpha}$  pour les froids. Une des conséquences du refroidissement global des électrons du plasma est l'effondrement de l'amplitude du choc et de la longueur du plateau par comparaison à l'expansion d'un plasma semi-infini. Parallèlement, la profondeur et la largeur du creusement du spectre des ions baissent également au cours de l'expansion, jusqu'à une complète dilution dans le plasma. Le champ électrique à l'intérieur du choc de raréfaction et le champ associé au pic du front d'ions diminuent promptement avec le temps.

# Chapitre 8

## Conclusion générale

Ce travail de thèse est composé en deux parties : étude fluide de l'expansion dans le vide d'un plasma semi-infini, et étude cinétique de l'expansion d'une feuille mince. Le point commun de ces deux parties étant la présence de deux populations d'électrons avec une fonction de distribution bi-Maxwellienne.

Dans la première partie, nous avons vu que lors de l'expansion dans un vide d'un plasma à deux températures d'électrons, il apparaît un choc de raréfaction si le rapport de la température chaude à la température froide est supérieure à  $5 + \sqrt{24}$  [21]. En modélisant le choc comme une discontinuité classique à l'aide des équations de conservation du flux de particules, du moment et de l'énergie, nous avons établi les différentes caractéristiques microscopiques du choc de raréfaction (amplitude, position, champ électrique associé, etc). Ce modèle analytique nous a permis de construire la structure complète de l'expansion uniquement avec les paramètres initiaux du plasma (températures et densités des électrons). Dans la limite où la température des électrons froids est très faible devant celle des électrons chauds, l'amplitude du choc de raréfaction et sa position sont données par des expressions analytiques simples. Celles-ci prolongent et corrigent un certain nombre de résultats obtenus par Tikhonchuk *et al.* [26] et Bezzerides *et al.* [21]. Suivant la valeur du rapport en densité dans le plasma initial  $y_u$ , nous avons distingué trois régimes d'expansion :

- **standard**, pour lequel on identifie : la région non-perturbée du plasma, une région d'expansion lente, le choc de raréfaction, un plateau et enfin une région d'expansion rapide dominée par les électrons chauds.
- **supersonique**, pour lequel la région d'expansion lente disparaît et le choc de raréfaction se connecte directement au plasma non-perturbé.
- **raréfaction des électrons chauds**, pour lequel il n'a plus de choc de raréfaction dans le plasma. La région d'expansion rapide est ainsi directement reliée au plasma initial.

Nous avons vu que la présence de deux populations d'électrons de températures différentes induit un creusement sur le spectre en vitesse des ions. Par ailleurs, les électrons froids ont un effet bénéfique sur l'accélération des ions. En effet en augmentant la pression initiale des électrons de basse énergie, on amplifie le champ accélérateur initial et par conséquent

la vitesse maximale des ions. Enfin, les simulations numériques effectuées avec un code hybride 1-D et non collisionnel, sont en très bon accord avec les résultats du modèle analytique.

Dans la seconde partie, nous avons étudié l'expansion d'une feuille mince avec un code cinétique 1-D non relativiste. Les conditions initiales restent identiques à celles utilisées dans le modèle présenté ci-dessus. La dynamique des électrons est gouvernée par l'équation de Vlasov, alors que les ions sont toujours traités comme des macro-particules. Le caractère fini de la cible implique une conservation de l'énergie et de la densité des particules. La fonction de distribution des électrons évoluant dans le temps et l'espace, il est donc possible de définir une température moyenne pour chaque espèce d'électrons à chaque instant en l'intégrant sur toute la boîte de la simulation.

Nous avons montré que dans le régime supersonique et de raréfaction des électrons, les électrons de basse énergie subissent un chauffage très important lors de la phase initiale de l'expansion. Avec la loi de Laplace  $p \sim n^\gamma$  pour  $\gamma = 3$ , nous avons alors établi une expression de la température des électrons froids. Par ailleurs, le gain maximum en température peut être exprimé uniquement en fonction du rapport initial de la température des électrons, soit  $(\alpha/3)^{2/3}$ . Ce chauffage découle d'une compression adiabatique des électrons froids par le champ électrique associé à l'onde de raréfaction. Cependant, noter que ce régime d'expansion est très académique, tant les rapports en densité considérés  $y_u \gg 1$  semblent très éloignés des résultats qu'on peut obtenir lors de l'interaction laser-matière.

Pour des valeurs du rapport en densité dans le plasma initial plus proches de la réalité expérimentale, on observe un refroidissement des électrons froids comme des électrons chauds. Cependant, ces derniers perdent leur énergie plus vite (sur un temps de l'ordre de  $\tau$ ) que les électrons froids ( $\tau \sqrt{\alpha}$ ). On a montré également que l'amplitude du choc de raréfaction diminue au cours de l'expansion du fait du refroidissement des électrons chauds. Celui-ci induit une réduction de la valeur du rapport initial en température  $\alpha$ . De même la profondeur du creusement sur le spectre en vitesse des ions se réduit considérablement au cours de l'expansion contrairement au cas d'une expansion semi-infini.

Pour interpréter les résultats expérimentaux, on utilise souvent le modèle d'expansion d'un plasma avec une seule population d'électrons, et les prédictions théoriques corroborent assez bien les résultats expérimentaux, même si on est conscients de l'existence d'au moins deux populations d'électrons dans le plasma. Cet accord peut en partie s'expliquer par le refroidissement des électrons chauds. En effet l'amplitude effective du choc de raréfaction dépend essentiellement de la température des électrons chauds, et celle-ci décroît très vite au cours l'expansion. Ainsi, sur des temps d'expansion longs, l'accélération peut être modélisée comme l'expansion d'ions soumis à la seule pression des électrons des chauds.

Le refroidissement des électrons rend très difficile la mise en évidence expérimentale du choc de raréfaction. Cependant, l'utilisation d'impulsion laser longs devrait permettre d'observer le choc de raréfaction, et à l'aide des ses caractéristiques (amplitude, vitesse) de diagnostiquer les électrons froids (densité et température) du plasma.

L'étude que l'on a menée durant cette thèse est restreinte uniquement à des plasmas non magnétisés. Cependant, pour des lasers très intenses, le champ magnétique créé lors de l'interaction d'une impulsion laser intense avec une cible mince, devient non négligeable. De plus, la présence des électrons très énergétiques et d'un courant de retour plus froid induisent une anisotropie de tels plasmas. Du fait de cette anisotropie de la fonction de distribution des électrons, les instabilités de électromagnétiques peuvent se développer au cours de l'expansion du plasma, si la vitesse thermique des électrons n'est très pas petite comparée à la vitesse de la lumière comme le montre Thauray [24]. Les effets de l'instabilité de Weibel sur le transfert d'énergie doivent être explorer. Par ailleurs, une modélisation 2-D voire 3-D de l'expansion du plasma serait particulièrement intéressante pour évaluer les effets transverses de l'expansion sur la structure du choc de raréfaction et sur le transfert d'énergie entre les électrons et les ions.

# Annexe A

## Annexe

Dans cette annexe, on présente le calcul effectué par Morse & Nielson [19], pour estimer les éléments caractéristiques du choc de raréfaction (amplitude du saut en potentiel, rapports en densité, vitesse en amont et en aval du choc) qui est susceptible de se former lors de la détente dans un vide d'un plasma avec une distribution des électrons bi-Maxwellienne.

### A.1 Modèle physique

On considère la détente isotherme d'un plasma semi-infini dans un vide. Au temps  $t = 0$ , les ions de masse  $m_i$  de charge  $Ze$  sont froids, et ils occupent le demi-espace  $x \leq 0$ , avec une densité définie telle que :  $n = n_u$  pour  $x \leq 0$  et  $n = 0$  ailleurs, où  $x$  est la direction normale au plasma. La dynamique des ions est gouvernée par les équations fluides qui, à l'aide de la variable auto-semblable  $\xi = x/t$ , s'écrivent sous la forme :

$$(v - \xi) \frac{\partial n}{\partial \xi} = -n \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (\text{A.1})$$

$$(v - \xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (\text{A.2})$$

où  $\phi$  est le potentiel électrostatique du plasma et où nous avons posé  $m = m_i/Z$ .

Le plasma est également composé de deux espèces d'électrons de densité et de température initiales  $(n_{hu}, T_h)$  pour les chauds et  $(n_{cu}, T_c)$  pour les froids. On suppose que les électrons sont en équilibre de Boltzmann avec le potentiel électrostatique  $\phi$ , soit

$$\frac{dP}{d\xi} = en_e \frac{d\phi}{d\xi} \quad (\text{A.3})$$

où  $P$  est la pression des électrons. Par ailleurs, grâce à l'hypothèse de la quasi-neutralité du plasma  $n_e = Zn$ , et à l'aide de (A.3), on peut ré-écrire l'équation (A.2), sous la forme :

$$n(v - \xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Choc de raréfaction

Remarquons que dans leur papier Morse & Nielson supposent que le mouvement des électrons chauds à la surface du plasma crée un saut en potentiel de  $\phi = 0$  à  $\phi = \phi_1 < 0$ . Ils estiment ensuite, avec le modèle que l'on présente ici, les différentes caractéristiques de la discontinuité avec la seule connaissance des paramètres initiaux du plasma. Cependant, ils n'établissent pas les conditions de l'existence d'une telle discontinuité, et ne font pas état de la nature de celle-ci.

On procède maintenant au développement de la dérivée suivante :

$$\frac{d}{d\xi} n(v - \xi)^2 = 2n(v - \xi) \left( \frac{dv}{d\xi} - 1 \right) + (v - \xi)^2 \frac{dn}{d\xi} \quad (\text{A.5})$$

Ensuite, en reportant (A.4) et (A.1) dans (A.5), on obtient alors l'équation de conservation du moment au travers du choc,

$$\frac{d}{d\xi} \left[ n(v - \xi)^2 + \frac{P}{m} \right] = -2n(v - \xi) \quad (\text{A.6})$$

Avec le même raisonnement, on trouve également les équations de conservation du flux et de l'énergie des ions sous la forme :

$$\frac{d}{d\xi} [n(v - \xi)] = -n \quad (\text{A.7})$$

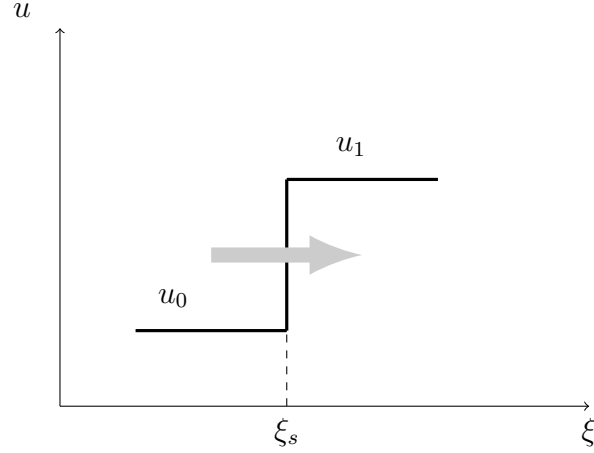
$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{2} (v - \xi)^2 + \frac{e}{m} \phi \right] = -(v - \xi) \quad (\text{A.8})$$

Ces équations, (A.6)-(A.8), montrent que la discontinuité est stationnaire, ce qui justifie l'hypothèse avancée au chapitre 4.2.

### Les conditions de saut

On considère maintenant que le choc de raréfaction se produit en une valeur particulière de la variable auto-semblable  $\xi_s$  (voir figure A.1). Dans le référentiel lié au déplacement du choc, on intègre les équations (A.6-A.8), celles-ci s'écrivent alors :

$$n_0 u_0 = n_1 u_1 \quad (\text{A.9})$$



**FIGURE A.1** – Structure de l'écoulement du plasma. La flèche indique le sens de l'écoulement.

$$\frac{1}{2}u_0^2 = \frac{1}{2}u_1^2 - w c_{sh}^2 \quad (\text{A.10})$$

$$n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m} = n_1 u_1^2 + \frac{P_1}{m} \quad (\text{A.11})$$

où  $u_0 = v_0 - \xi_s$ ,  $u_1 = v_1 - \xi_s$ ,  $w = e(\phi_0 - \phi_1)/k_B T_h$ .

Dans leur modèle, Morse & Nielson font les hypothèses suivantes :

1. la vitesse de l'écoulement en amont de la discontinuité  $u_0$  est a priori de l'ordre de  $c_{sc} = (k_B T_c / m)^{1/2}$ . Ce qui permet de négliger ce terme supposant  $T_c$  très petit devant  $T_h$ . L'équation de la conservation de l'énergie devient ainsi :

$$u_1^2 = 2 w c_{sh}^2 \quad (\text{A.12})$$

Cette relation est équivalente à 5.15 dans la limite  $u_0 \simeq c_{sc} \ll c_{sh}$  (régime dans lequel on se place ici).

2. on suppose que la pression des électrons froids des deux côtés de la discontinuité est négligeable, on peut donc écrire  $P_0 \simeq n_{h0} T_h$  et  $P_1 \simeq n_{h0} T_h e^{-w}$ . En reportant ces deux expressions dans l'équation de conservation du moment on obtient

$$2 w = e^w - 1 \quad (\text{A.13})$$

La solution de l'équation transcendante (A.13) correspond au premier terme de notre développement (5.34). La résolution de cette équation est faite à l'aide d'un algorithme numérique basé sur la méthode de la bissection, on trouve que la valeur de l'amplitude du saut en potentiel du choc vaut  $w \simeq 1.2564$ . Par la suite on estime toutes les grandeurs de

l'écoulement : vitesse amont et aval du choc, et la densité des électrons chauds en amont du choc. On obtient les résultats numériques suivants :

$$n_{h1} \simeq e^{-w} n_{h0} \simeq 0.2846 n_{h0} \quad (\text{A.14})$$

$$u_1 \simeq \sqrt{2w} c_{sh} \simeq 1.5852 c_{sh} \quad (\text{A.15})$$

$$u_0 \simeq e^{-w} \sqrt{2w} c_{sh} \simeq 0.4511 c_{sh} \quad (\text{A.16})$$

où  $c_{sh} = (k_B T_h / m)^{1/2}$ . Dans la limite  $\alpha \gg 1$  et  $y_u < 1$ , le modèle de Morse & Nielson reste valable. Ces résultats sont en très bon accord avec les calculs effectués dans le chapitre [5.3.1](#). Leur hypothèse repose sur le fait que si  $n_0 = n_{h0}$  alors  $\frac{1}{2} u_0^2 \simeq 0.1 c_{sh}^2$  est négligeable devant l'énergie en aval de la discontinuité  $\frac{1}{2} u_1^2 \simeq 1.26 c_{sh}^2$ .



## **Listes des publications**

# Rarefaction shock in plasma with a bi-Maxwellian electron distribution function

A. Diaw and P. Mora\*

Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, CNRS, FR-91128 Palaiseau, France

(Received 24 May 2011; published 7 September 2011)

The one-dimensional collisionless expansion into a vacuum of a plasma with a bi-Maxwellian electron distribution function and a single ion species is studied both theoretically and numerically. A shock wave occurs when the ratio of the temperatures between the hot and the cold electrons is larger than  $5 + \sqrt{24}$  [B. Bezzerides, D. W. Forslund, and E. L. Lindman, *Phys. Fluids* **21**, 2179 (1978)]. The theoretical model presented here gives a coherent and complete description of the rarefaction shock and its effects on the ion acceleration process. Analytical expressions of the characteristics of the shock are given. The analytical findings are compared to the results of a hybrid code describing the plasma expansion, and an excellent agreement is obtained.

DOI: [10.1103/PhysRevE.84.036402](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.036402)

PACS number(s): 52.35.Tc, 52.30.Ex, 52.38.Kd, 52.65.Ww

## I. INTRODUCTION

The physics of the interaction of ultraintense lasers with matter, transformed instantaneously into a very hot plasma, involves various nonlinear phenomena, which occur on very short time scales. A general consequence is the generation of fast electrons (hot electrons) with potentially relativistic velocities coexisting with low energy electrons [1]. In thin foil experiments, the hot electrons can accelerate ions to high energy by causing the foil to expand [2–4].

By studying the expansion of a plasma with electrons described by a bi-Maxwellian distribution function (with hot and cold electron temperatures  $T_h$  and  $T_c$ , respectively), Wickens *et al.* [5] noticed the possibility of a breakdown of the quasineutrality assumption when the ratio  $T_h/T_c$  is greater than  $5 + \sqrt{24}$ , and Bezzerides *et al.* [6] demonstrated theoretically the existence of a rarefaction shock wave in such conditions. Our aim here is to extend these studies in order to give a complete description of the rarefaction shock wave.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we present the general equations governing the one-dimensional collisionless plasma expansion into a vacuum and look for a self-similar solution in the quasineutral limit. The conditions required for the occurrence of a rarefaction shock wave are given, and the equations describing the shock and the charge-separation effect inside the shock are written. In Sec. III, the case of a plasma with a bi-Maxwellian electron distribution function with a single ion species is presented in detail. The different regimes for which a rarefaction shock can occur in the plasma are investigated with respect to the ratio of the hot electron density to the cold electron density in the unperturbed plasma. Analytical expressions of the parameters of the rarefaction shock wave are derived by performing expansions for a large ratio of  $T_h/T_c$ . Particular attention is paid to the speed of the rarefaction shock compared to the acoustic velocity. Section IV is devoted to the numerical simulations performed with a one-dimensional hybrid code and to their comparison with the results of the analytical model. Finally, the influence of the rarefaction shock wave on the ion acceleration and ion spectrum is discussed.

## II. PLASMA EXPANSION

### A. General equations

We first recall the general equations describing the plasma expansion, following Bezzerides *et al.* [6]. We consider at  $t = 0$  a one-dimensional plasma composed of cold ions of mass  $m_i$  and charge  $Ze$ , occupying the half-space  $x \leq 0$  with uniform density  $n_u/Z$  (in the following the subscript  $u$  will always correspond to the unperturbed plasma), and of electrons in equilibrium with the electric potential  $\phi(x, t = 0)$  that builds up due to the charge separation at the plasma edge, with density  $n_e(\phi)$  and pressure  $P(\phi)$ . We assume that the potential vanishes in the unperturbed plasma ( $x < 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ ), with  $n_e(0) = n_u$ .

For  $t > 0$ , the ion's motion is described by the fluid equations, which can be written as

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2)$$

where  $n(x, t)$  is the ion density multiplied by  $Z$ ,  $v(x, t)$  is the ion velocity,  $m = m_i/Z$ , and where  $\phi(x, t)$  is now time dependent.

Due to the smallness of their mass, the electrons are assumed to stay in equilibrium with the electric potential  $\phi(x, t)$ , at any position and time, with the same functions  $n_e(\phi)$  and  $P(\phi)$  as initially. The equilibrium condition reads as

$$n_e(\phi) = \frac{1}{e} \frac{dP}{d\phi}, \quad (3)$$

or, equivalently, considering  $P$  as a function of  $x$  and  $t$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{en_e} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4)$$

Finally, the electric potential satisfies Poisson's equation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n). \quad (5)$$

### B. Self-similar solution

If the local scale length  $n/(\partial n/\partial x)$  is much larger than the local Debye length  $\lambda_D = [\epsilon_0/e(dn_e/d\phi)]^{1/2}$ , we can assume

\*patrick.mora@cphpt.polytechnique.fr

quasineutrality and write  $n = n_e(\phi)$ . We can then look for a self-similar solution where the similarity parameter is  $\xi = x/t$ . The fluid equations of ions simplify to

$$(v - \xi) \frac{dn}{d\xi} = -n \frac{dv}{d\xi}, \quad (6)$$

$$(v - \xi) \frac{dv}{d\xi} = -\frac{c_s^2}{n} \frac{dn}{d\xi}, \quad (7)$$

where

$$c_s^2 = \frac{n_e}{dn_e/d\phi} = \frac{1}{m} \frac{dP}{dn_e}, \quad (8)$$

for which we have defined  $\phi = e\phi/m$ .

When  $dn/d\xi \neq 0$ , Eqs. (6) and (7) combine to give

$$(v - \xi)^2 = c_s^2. \quad (9)$$

The solution corresponding to an expansion toward  $x > 0$  is thus given by

$$v = \xi + c_s, \quad (10)$$

while the electric potential and the position  $\xi$  are related by the equation

$$\frac{d\xi}{d\phi} = -\left(\frac{1}{c_s} + \frac{dc_s}{d\phi}\right). \quad (11)$$

The right-hand side of Eq. (11) is normally negative and the full solution is obtained by integrating it to obtain  $\xi$  as a function of  $\phi$ . However, if the right-hand side of Eq. (11) happens to be positive for some values of  $\phi$ , i.e., if

$$c_s \frac{dc_s}{d\phi} \leq -1, \quad (12)$$

one ends up with a mathematical solution where  $\phi$  is a multivalued function of  $\xi$  for a range of values. Physically, a rarefaction shock appears, as discussed by Bezzerides *et al.* [6].

### C. Rarefaction shock

Let  $\xi_s$  be the self-similar parameter corresponding to the position of the shock. We may treat the shock as a stationary discontinuity in the frame moving with the shock. The equations of conservation of mass and energy flux in this frame read as

$$\frac{d}{dx} (nu) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} u^2 + \phi \right) = 0, \quad (14)$$

where  $u = v - \xi_s$  is the relative velocity. To write the momentum conservation equation, one has to take into account the charge separation inside the shock. Multiplying Eq. (14) by  $n$ , and using Eqs. (3), (5), and (13), one obtains

$$\frac{d}{dx} \left[ nu^2 + \frac{P}{m} - \frac{\epsilon_0 m}{2e^2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = 0. \quad (15)$$

The jump conditions are

$$n_0 u_0 = n_1 u_1, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} u_0^2 + \phi_0 = \frac{1}{2} u_1^2 + \phi_1, \quad (17)$$

where the subscripts 0 and 1 denote the conditions upstream and downstream of the shock, respectively, and

$$n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m} = n_1 u_1^2 + \frac{P_1}{m}, \quad (18)$$

where we have taken into account the fact that the term involving the square of the electric field in Eq. (15) is of order  $1/(\omega_{pi0} t)^2$  on the upstream side, for which  $\omega_{pi0} = (n_0 e^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$  is the ion plasma frequency, and anticipated the fact that it vanishes on the downstream side, thus neglecting both terms in our analysis, assuming  $\omega_{pi0} t \gg 1$ .

The conservation equations across the discontinuity combine in the Hugoniot relation

$$\phi_0 - \phi_1 = \left( \frac{P_0 - P_1}{2m} \right) \left( \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1} \right). \quad (19)$$

Inside the shock, the electrostatic energy can be deduced from Eqs. (13), (14), and (15), resulting in

$$\frac{\epsilon_0 m}{2e^2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = F(\phi), \quad (20)$$

with

$$F(\phi) = n_0 u_0 \sqrt{u_0^2 + 2(\phi_0 - \phi)} - n_0 u_0^2 + \frac{P - P_0}{m}. \quad (21)$$

The function  $F(\phi)$  verifies

$$\frac{dF(\phi)}{d\phi} = n_e - n \quad (22)$$

and

$$\frac{d^2 F(\phi)}{d\phi^2} = \frac{n_e}{c_s^2} - \frac{n}{u^2}. \quad (23)$$

The function  $F(\phi)$  and its first derivative vanish on both sides of the discontinuity (as the electric field and the charge separation do), but  $F(\phi)$  has to be positive in the interval  $\phi_1 < \phi < \phi_0$ , which implies that the second derivative of  $F(\phi)$  has to be  $\geq 0$  both for  $\phi_0$  and  $\phi_1$ , meaning that the flow has to be sonic or supersonic on both sides of the discontinuity, i.e.,

$$u_0 \geq c_{s0}, \quad u_1 \geq c_{s1}. \quad (24)$$

On the other hand, at the position of the maximum of the electric field,  $dF(\phi)/d\phi$  vanishes and the second derivative  $d^2 F(\phi)/d\phi^2$  has to be negative, which means that the flow has to be subsonic at this point.

An alternate way to define an acoustic velocity is by reference to the ion density instead of the electron density, with

$$c_{si}^2 = \frac{1}{m} \frac{dP}{dn}. \quad (25)$$

The two velocities  $c_s$  and  $c_{si}$  coincide in the quasineutral part of the expansion, but differ inside the shock. Differentiating

Eq. (21) and using Eq. (22) and the conservation of mass flux, one obtains inside the shock

$$c_{si} = \sqrt{\frac{n_e}{n}} u. \quad (26)$$

With this definition of the acoustic velocity, the flow is sonic both on the upstream and on the downstream sides. Inside the shock, it first becomes subsonic and then supersonic, as we will illustrate in the case of a bi-Maxwellian electron distribution function.

### III. CASE OF A BI-MAXWELLIAN ELECTRON DISTRIBUTION FUNCTION

We now consider the case of a bi-Maxwellian electron population, with

$$\begin{aligned} n_e(\phi) &= n_h(\phi) + n_c(\phi) \\ &= n_{hu} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_h}\right) + n_{cu} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_c}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

where  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $T_h$  and  $T_c$  are, respectively, the hot and cold temperatures, and  $n_{hu}$  and  $n_{cu}$  are the corresponding densities in the unperturbed plasma, with  $n_{hu} + n_{cu} = n_u$ .

The ion acoustic velocity is

$$c_s(y) = c_{sh} \sqrt{\frac{1+y}{\alpha+y}}, \quad (28)$$

where  $c_{sh} = \sqrt{k_B T_h / m}$  is the sound velocity associated with hot electrons only, and

$$\alpha = T_h / T_c, \quad y(\phi) = n_h / n_c. \quad (29)$$

As shown by both Wickens *et al.* [5] and by Bezzerides *et al.* [6], a necessary condition for Eq. (12) to be valid is  $\alpha \geq 5 + \sqrt{24} \approx 9.9$ . Figure 1 shows the electric potential normalized to  $k_B T_h / e$  as a function of  $\xi / c_{sh}$  precisely for

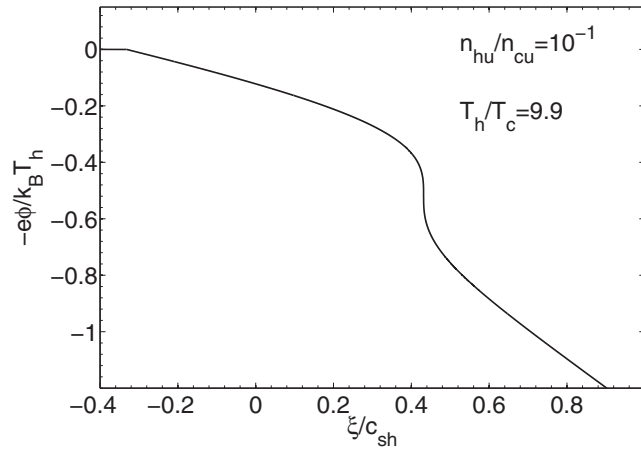


FIG. 1. Electric potential  $\phi$  as a function of  $\xi$ , calculated by numerical integration of Eq. (11). The parameters are  $\alpha = T_h / T_c = 5 + \sqrt{24} \approx 9.9$  and  $y_u = n_{hu} / n_{cu} = 0.1$ .

the critical temperature ratio  $\alpha = 5 + \sqrt{24}$  and a density ratio  $y_u = y(0) = n_{hu} / n_{cu} = 0.1$ . In this case, the derivative  $d\xi/d\phi$  vanishes at a position where  $y = 5 + \sqrt{24}$ . Note that this occurs only when  $y_u$  is smaller than this critical value.

#### A. Rarefaction shock: Standard case

Figure 2 shows the solution of Eq. (11) for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$ . The portion of the curve between  $C$  and  $D$  corresponds to the values of  $\phi$  for which the condition (12) is true. Also shown in Fig. 2 is the physical solution obtained by using the jump conditions (16)–(18) with the constraint (24). The following regions are identified: the unperturbed plasma on the left of the rarefaction wave situated in  $A$ , an expansion dominated by cold electrons between  $A$  and  $B$ , the shock rarefaction joining  $B$  and  $E$ , a plateau between  $E$  and  $F$ , and an expansion dominated by hot electrons on the right of  $F$ . Contrary to what was supposed by Wickens and Allen [7], the discontinuity does not coincide with the first occurrence of the singular point on the multivalued self-similar solution. In other words, the discontinuity occurs before reaching  $C$ .

The Hugoniot relation (19) can be written as

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left[ y_0(1 - e^{-w}) + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha w}) \right] \\ &\times \left( \frac{1}{y_0 + 1} + \frac{1}{y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

where  $w = e(\phi_0 - \phi_1) / k_B T_h$ ,  $y_0 = n_{h0} / n_{c0}$ ,  $n_{h0} = n_h(\phi_0)$ , and  $n_{c0} = n_c(\phi_0)$ . Given  $w$  ( $>0$  for a rarefaction), Eq. (30) is a quadratic equation for  $y_0$ , which has two positive solutions provided that  $w$  is not too large. The upstream and downstream velocities are

$$u_0 = c_{sh} \left[ \frac{2w}{\left( \frac{y_0 + 1}{y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}} \right)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (31)$$

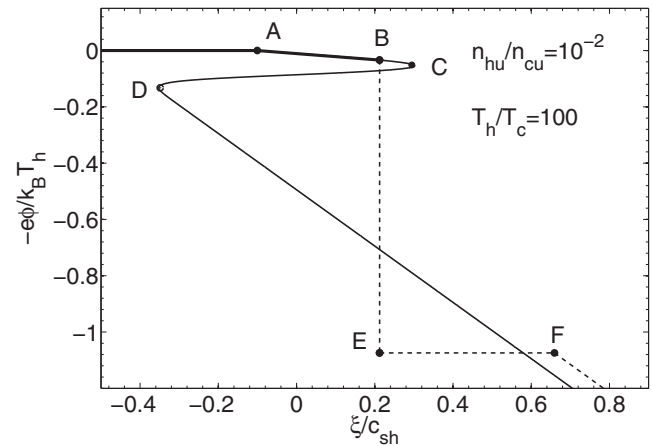


FIG. 2. Electric potential  $\phi$  (solid line) as a function of  $\xi$ , calculated by numerical integration of Eq. (11), for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$ . Also shown (dashed line) is the physical solution obtained by using the jump conditions (16)–(18) with the constraint (24). The upper part, down to point  $B$  (thick black line), is common to the two solutions.

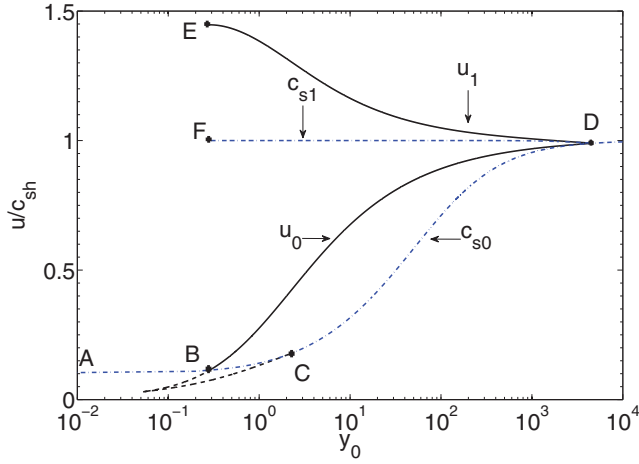


FIG. 3. (Color online) Ion velocity as a function of the electrons density ratio  $y_0$  upstream of the shock for a temperature ratio  $\alpha = 10^2$ . The dotted-dashed blue lines represent the sound velocity upstream  $c_{s0}$  and downstream  $c_{s1}$  of the shock. The solid black lines are the ion velocity upstream  $u_0$  and downstream  $u_1$  of the shock. The dashed line represents the values of  $u_0$  for which the constraint (24) is not fulfilled.

and

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2w c_{s0}^2}. \quad (32)$$

The upstream velocity  $u_0$  is plotted in Fig. 3 as a function of  $y_0$  for  $\alpha = 10^2$ . Also shown is the upstream sound velocity  $c_{s0}$ . The solutions for which  $u_0 < c_{s0}$  (which would correspond to a plateau on the upstream side) are plotted as dashed lines, as they violate the constraint (24) and, thus, do not correspond to a physical solution. Also shown are the downstream velocity  $u_1$  and the downstream sound velocity  $c_{s1}$  (only drawn for the physical solution).

Let us now discuss the position of the upstream point  $B$  of Fig. 2 on the graph of Fig. 3. First of all,  $B$  must correspond to a solution of the Hugoniot equation. Second, it also belongs to the rarefaction expansion dominated by the cold electrons, with  $v_0 = \xi_s + c_{s0}$  and thus  $u_0 = c_{s0}$ . As a result, point  $B$  is at the intersection of the Hugoniot curve  $u_0(y_0)$  and of the sonic curve  $c_{s0}(y_0)$ , so that, combining Eqs. (28) and (31), one has

$$w = \frac{1}{2} \frac{1 + y_0}{\alpha + y_0} \left[ \left( \frac{1 + y_0}{y_0 e^{-w} + e^{-\alpha w}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (33)$$

### B. Detailed structure of the shock

Figure 4 shows the  $P, V_e$  and the  $P, V$  diagrams (where  $V_e = 1/n_e$  and  $V = 1/n$ ) of the rarefaction shock for a temperature ratio  $\alpha = 10^2$ . The points A–F identified in the plasma expansion in Fig. 2 are also shown. The two curves coincide on the left of  $B$  and on the right of points  $E, F$ , where the flow is quasineutral. The dashed line is the straight

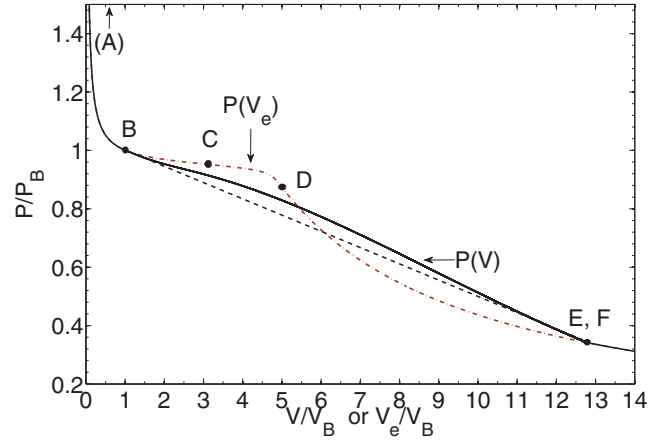


FIG. 4. (Color online) Electron pressure as a function of the electron specific volume  $V_e = 1/n_e$  (dotted-dashed brown line) and of the ion specific volume  $V = 1/n$  (solid line) for  $\alpha = 10^2$ . The points A–F identified in the plasma expansion in Fig. 2 are also shown. The dashed line is the straight line connecting  $B$  to  $E$ . The specific volumes  $V_e$  and  $V$  and the pressure  $P$  are normalized to their values on the upstream side of the shock (point  $B$ ).

line connecting  $B$  to  $E$ , and corresponds to the equation

$$nu^2 + \frac{P}{m} = n_0 u_0^2 + \frac{P_0}{m}, \quad (34)$$

with  $nu = n_0 u_0$ . The difference between the curve  $P(V)$  (black line) and the straight dashed line is simply proportional to the electrostatic energy density in the shock. The three curves are tangents at point  $B$ , which is related to the fact that the sound velocities  $c_s$  and  $c_{si}$  coincide and are equal to the upstream flow velocity  $u_0$ . At point  $E$  (but on the left of point  $E$ ), the tangent to the curve  $P(V)$  coincides with the dashed line, which is due to the fact that the sound velocity  $c_{si}$  coincides with the downstream flow velocity  $u_1$ , but differs from the tangent of the curve  $P(V_e)$ . This can be explained by the fact that the two sound velocities differ on the left of point  $E$ , and that the flow is supersonic in the sense that  $u_1 > c_s$ .

If we now consider the function  $P(V)$  on both sides of point  $E$ , we observe that its derivative is discontinuous, which means that the sound velocity  $c_{si}$  is discontinuous. Thus, two characteristics  $C_-$  with different slopes emanate from the break point  $E$ , leading to the formation of a plateau, the length of which is given by  $\Delta c_{si} t$ , where  $\Delta c_{si} = c_{si} - c_s$  is the difference between the two sound velocities. Note the similarities with the case of a rarefaction shock wave in a medium undergoing a phase transition with  $(\partial^2 P / \partial V^2)_s < 0$ , as discussed schematically by Bethe [8] and in more details by Zel'dovich and Raizer [9]. Here, the condition (12) instead reads as  $(\partial^2 P / \partial V_e^2)_{T_h, T_c} < 0$ , and the break point is on the downstream side, not on the upstream side.

Once the shock parameters are known, it is possible to determine the structure of the electric field  $E = -\partial\phi/\partial x$  in the rarefaction shock by solving Eq. (20) with the appropriate boundary conditions. The result is given in Figs. 5(a) and 5(b), where  $\phi$  and  $E$  are shown as functions of  $X \approx x - \xi_s t$  for a temperature ratio  $\alpha = 10^2$ . The position is normalized to the local Debye length  $\lambda_{Dh0} = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_h / n_{h0} e^2}$ , and the position

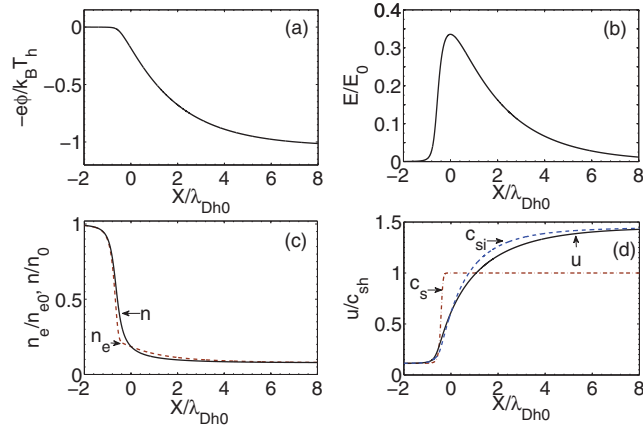


FIG. 5. (Color online) (a), (b) Profiles of the potential and the electric field in the shock wave. (c) Profiles of the ion and electron densities. (d) Profiles of the ion sound velocities and of the velocity of the ion stream. All profiles correspond to the standard case of Fig. 2, with  $\alpha = 10^2$ . The electric field is normalized to  $E_0 = \sqrt{n_{h0} k_B T_h / \epsilon_0}$ . The position  $X \approx x - \xi_s t$  is normalized to the Debye length  $\lambda_{Dh0} = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_h / n_{h0} e^2}$ , with  $X = 0$  corresponding to the maximum of the electric field.

$X = 0$  has been arbitrarily assigned to the position of the maximum of the electric field.

Figure 5(c) shows the corresponding ion and electron densities' profiles in the rarefaction shock as functions of  $X$ . Finally, Fig. 5(d) shows the profiles of the ion velocity and of the acoustic velocity. One observes that the flow, which is sonic upstream, becomes successively supersonic, subsonic, and supersonic (here we refer to the ratio of the flow velocity  $u$  to the acoustic velocity  $c_s$ ).

### C. Asymptotic expressions for $\alpha \gg 1$

For a large temperature ratio  $\alpha \gg 1$ , it is possible to obtain asymptotic expressions for the quantities characterizing the plasma expansion. Here, we complete or correct expressions given in [6,10,11]. First of all, the rarefaction wave enters the unperturbed plasma at the sound velocity  $c_s(y_u)$ , so that

$$\xi_A \approx -\left(1 + \frac{y_u}{2}\right) \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (35)$$

In Fig. 2, the points C and D between which the solution of Eq. (11) has a nonphysical slope are such that

$$y_C \approx 2 \left(1 + \frac{6}{\alpha}\right) \quad (36)$$

and

$$y_D \approx \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{6}{\alpha}\right). \quad (37)$$

The sound velocity in the upstream region is given by

$$c_s \approx \left(1 + \frac{y}{2}\right) \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (38)$$

The position of the rarefaction shock  $\xi_s$  is obtained by using Eq. (38) to integrate Eq. (11) between  $\xi_A$  and  $\xi_s$ , which gives

$$\xi_s \approx \left[ \ln \left( \frac{y_0}{y_u} \right) + \frac{y_u}{2} - y_0 - 1 \right] \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (39)$$

The upstream density ratio  $y_0$  and the potential jump  $w$  are obtained by looking for expansions of both quantities as powers of the small parameter  $1/\sqrt{\alpha}$ , inserting these expansions into Eqs. (30) and (33), and solving order by order. The results are (keeping only the leading two terms)

$$w \approx 1.26 - \frac{2.10}{\sqrt{\alpha}}, \quad (40)$$

$$y_0 = y_B \approx \frac{2.22}{\sqrt{\alpha}} + \frac{4.57}{\alpha}, \quad (41)$$

while the downstream density ratio  $y_1 = y_E = y_F = y_0 \exp(1 - \alpha)w$  is completely negligible. The upstream velocity  $u_0$  coincides with the sound velocity in B,

$$u_0 \approx \left(1 + \frac{1.11}{\sqrt{\alpha}}\right) \frac{c_{sh}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (42)$$

The downstream velocity is

$$u_1 \approx \left(1.59 - \frac{1.32}{\sqrt{\alpha}}\right) c_{sh}. \quad (43)$$

Finally, the position of point F, where the expansion dominated by the hot electrons begins, is given by

$$\xi_F \approx \xi_s + \left(0.59 - \frac{1.32}{\sqrt{\alpha}}\right) c_{sh}. \quad (44)$$

### D. Supersonic rarefaction shock case

When  $y_u = y_B$ , the analysis of Secs. III A–III C still applies, although the region of expansion dominated by the cold electrons (line A-B in Fig. 2) disappears, and A and B become

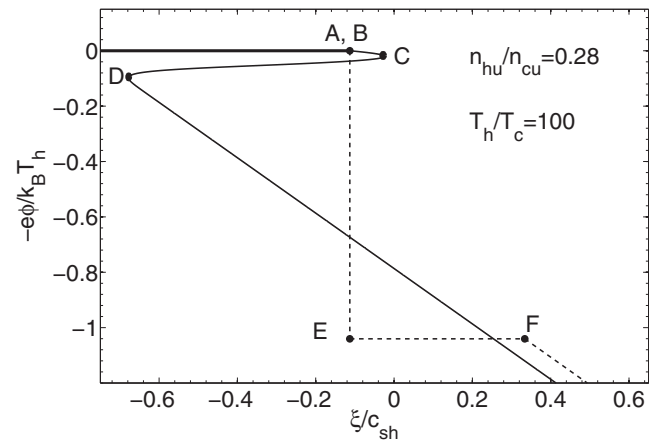


FIG. 6. Electric potential  $\phi$  (solid line) as a function of  $\xi$ , calculated by numerical integration of Eq. (11), for  $\alpha = 10^2$  and for the transition value  $y_u = y_B \approx 0.28$ . Also shown (dashed line) is the physical solution obtained by using the jump conditions (16)–(18) with the constraint (24).



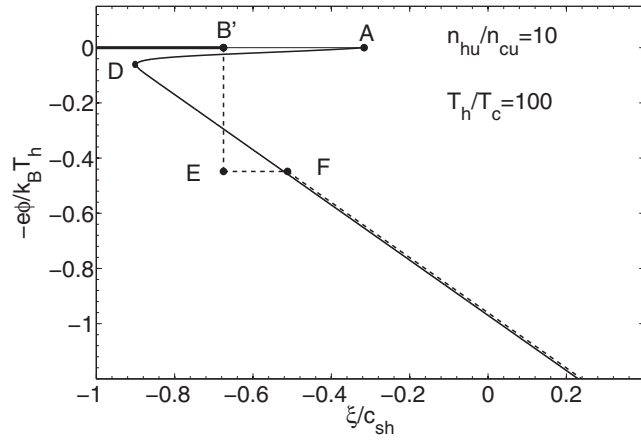


FIG. 7. Electric potential  $\phi$  (solid line) as a function of  $\xi$ , calculated by numerical integration of Eq. (11), for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10$ . Also shown (dashed line) is the physical solution obtained by using the jump conditions (??) with the constraint (24).

merged. The unperturbed plasma is directly connected to the rarefaction shock, which propagates inside the unperturbed plasma at the sonic velocity. This is illustrated in Fig. 6.

For  $y_u > y_B$  (and still  $y_u < y_D$ ), the structure of the expansion becomes different, as illustrated in Fig. 7, which plots the electric potential  $\phi$  as a function of  $\xi$  for  $\alpha = 100$  and  $y_u = 10$ . The unperturbed plasma is again directly connected to the rarefaction shock, but the shock now propagates inside the plasma at a supersonic velocity, as its position  $B'$  is further inside the plasma than the position  $A$  of a virtual sound wave.

Furthermore, one can note that, in contrast with the cases where  $y_u < y_B$ , the potential jump and the width of the plateau now become smaller and smaller as  $y_u$  increases.

The Hugoniot relation (30) is still valid, with  $y_0$  now given by  $y_u$ . Figure 8 is identical to Fig. 3, except that the positions of the points  $A$ ,  $B'$ ,  $E$ , and  $F$  corresponding to the parameters of Fig. 7, i.e.,  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10$ , have been added. In the same way, Fig. 9 is similar to Fig. 4 with the positions of the

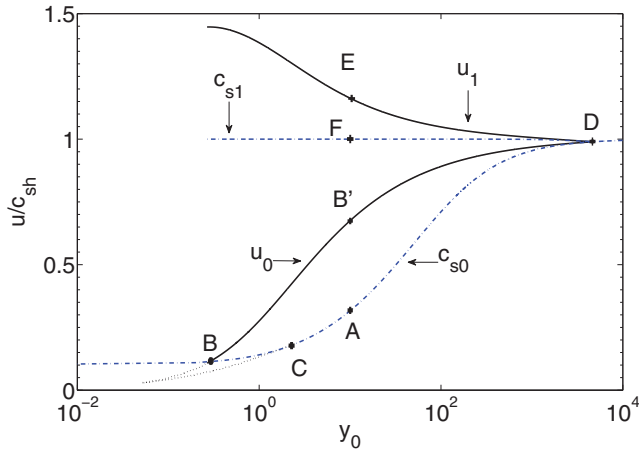


FIG. 8. (Color online) Same as Fig. 3, with the positions of the points  $A$ ,  $B'$ ,  $E$ , and  $F$  corresponding to the parameters of Fig. 7, i.e.,  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10$ .

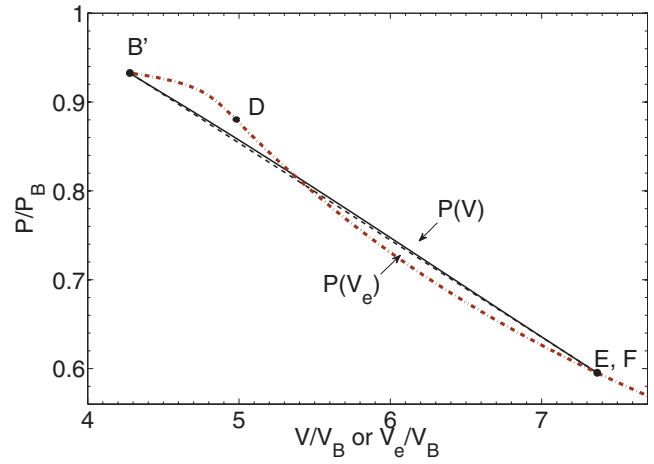


FIG. 9. (Color online) Same as Fig. 4, with the points  $B'$ ,  $D$ ,  $E$ , and  $F$  corresponding to the parameters of Fig. 7, i.e.,  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10$ .

points  $B'$ ,  $D$ ,  $E$ , and  $F$  corresponding to the parameters of Fig. 7.

In  $B'$ , the slope of the curve  $P(V)$  is larger than the slope of the curve  $P(V_e)$ . This can be understood by the fact that  $u_0 (= c_{si}) > c_s$  and that the rarefaction shock propagates at a supersonic velocity inside the unperturbed plasma.

On the downstream side, the situation is similar to that of the standard case, except that the difference of the values of the slopes of the two curves  $P(V)$  and  $P(V_e)$  in  $E, F$  is smaller, implying a smaller plateau length.

In the limit  $\alpha \gg 1$ , Eqs. (28), (30), and (31) can be simplified by neglecting terms of order  $1/\alpha$  or  $e^{-\alpha w}$ , giving

$$c_s(y_u) \approx c_{sh} \sqrt{\frac{1 + y_u}{\alpha}}, \quad (45)$$

$$w = \frac{1}{2} (1 - e^{-w}) \left( \frac{y_u}{y_u + 1} + e^w \right), \quad (46)$$

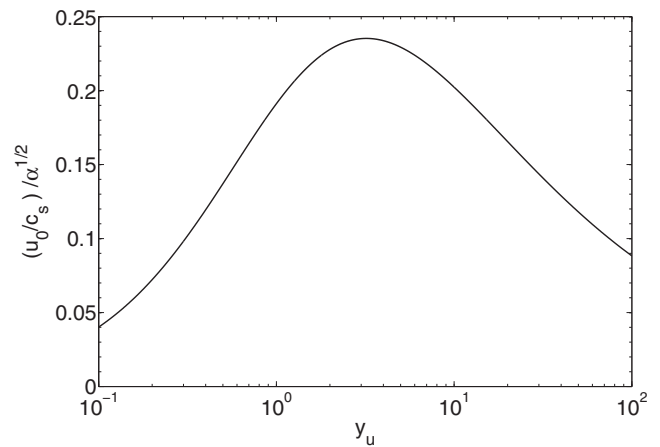


FIG. 10. Ratio of the upstream velocity to the acoustic velocity in the unperturbed plasma, as a function of the density ratio  $y_u$ , in the supersonic rarefaction shock case, in the limit  $\alpha \gg 1$ .

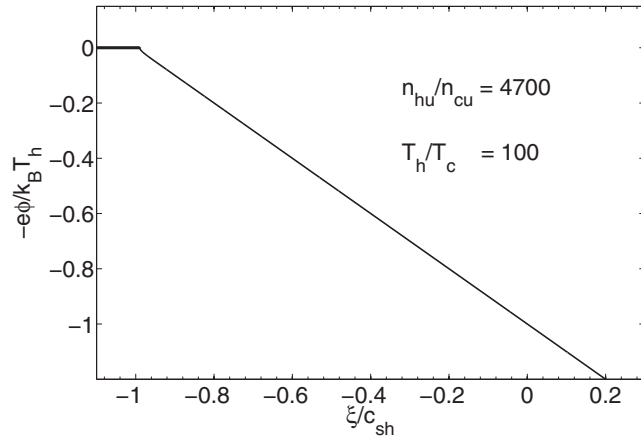


FIG. 11. Electric potential  $\phi$  as a function of  $\xi$ , calculated by numerical integration of Eq. (11), for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = y_D \approx 4700$ .

and

$$u_0 = c_{sh} \left[ \frac{2w}{\left( \frac{y_u+1}{y_u} e^w \right)^2 - 1} \right]^{1/2}. \quad (47)$$

The corresponding ratio  $u_0/c_s$  is plotted in Fig. 10 as a function of  $y_u$ . The ratio is maximal for  $y_u \approx 3.2$ , for which it reaches  $u_0/c_s \approx 0.24\sqrt{\alpha}$  (i.e.,  $u_0 \approx 0.48c_{sh}$ ).

#### E. Hot electrons rarefaction : $y_u \geq y_D$

In the limit  $y_u \geq y_D$ , the cold electrons are almost negligible. Figure 11 shows the electric potential for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = y_D \approx 4700$ . The shock rarefaction completely disappears as expected, and the region of expansion dominated by the hot electrons is directly connected to the unperturbed plasma. The parameters of the expansion can be expressed with the self-similar model with a single hot electron population, with

$$e\phi/k_B T_h \approx -(1 + x/c_{sh}t). \quad (48)$$

### IV. NUMERICAL SIMULATIONS

#### A. General features of the code

Numerical simulations were made with the collisionless one-dimensional hybrid code described in [12]. In this code, the ions are treated as macroparticles, the electrons are treated as a fluid with a density determined by a given function  $n_e(\phi)$ , and the nonlinear Poisson equation is solved iteratively. Such a code has been used in similar conditions in Ref. [13]. Here, the electrons satisfy Eq. (27) with  $T_h$  and  $T_c$  independent of time. The time step  $\Delta t$  is chosen to satisfy the plasma stability and, in most cases, is such that  $\omega_{pih}\Delta t = 0.1$ , where  $\omega_{pih} = (n_{hu}e^2/m\epsilon_0)^{1/2}$  is the ion plasma frequency associated with the hot electrons density in the unperturbed plasma.

#### B. Simulation results

Figure 12 shows the profile of the electric potential for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$ , which are the parameters also used in Figs. 2–5, and for  $\omega_{pih}t = 20, 100$ , and 500. To facilitate

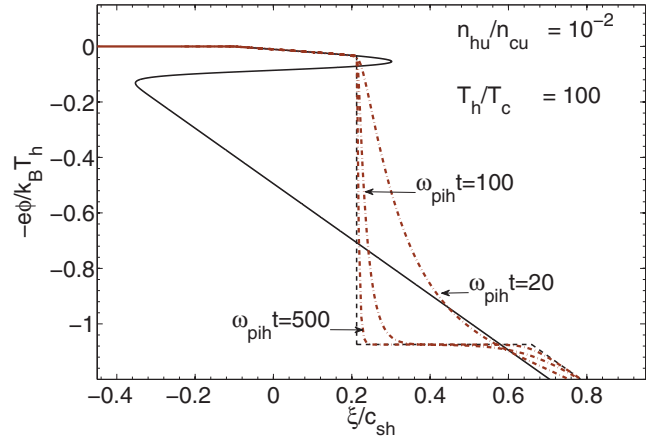


FIG. 12. (Color online) Electric potential  $\phi$  (dotted-dashed brown line) as a function of  $\xi$  for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$  and at different times  $\omega_{pih}t = 20, 100$ , and 500, as obtained with the hybrid code. Also shown (solid line) is the result obtained from the numerical integration of Eq. (11). The dashed line is the result of the analytical model presented in Sec. III.

the comparison with Fig. 2, we also show in green the result obtained from the numerical integration of Eq. (11) and in blue the result of the analytical model presented in Sec. III. There is an excellent agreement between the analytical model and the numerical results, in particular for large values of  $\omega_{pih}t$ .

As discussed in Sec. III B, the width of the shock is determined by the local Debye length. The electric field is shown in Fig. 13 as a function of  $\xi$ , for the earlier time  $\omega_{pih}t = 20$ . Here, the electric field is normalized to  $E_u = \sqrt{n_{hu}k_B T_h/\epsilon_0}$ . Also shown in the inset is a zoom around the shock position, with  $E$  shown as a function of  $X' = x - \xi_s t$ . For ease of comparison, the same normalizations are used in the inset as in Fig. 5(b). With the parameters of the simulation,  $n_{h0} \approx 0.967n_{hu}$ , so that the difference between  $E_u$  and  $E_0$  is less than 2%.

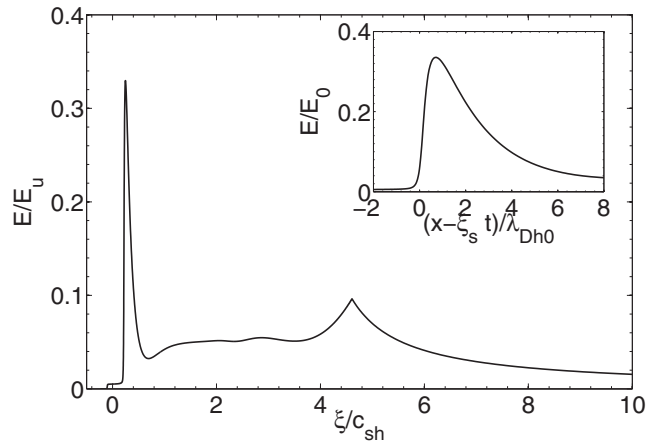


FIG. 13. Electric field as a function of  $\xi$ . The parameters of the simulations are  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$ , and  $\omega_{pih}t = 20$ . The inset is a zoom around the shock position for an easier comparison with Fig. 5(b). The normalizations are discussed in the text.



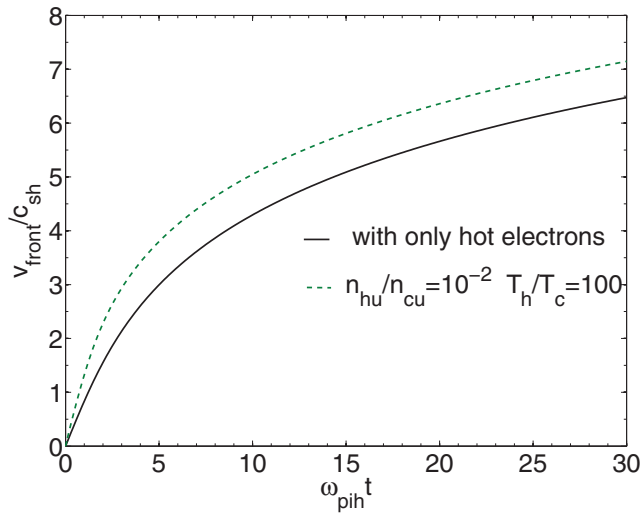


FIG. 14. (Color online) Ion front velocity as a function of time for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$ . Also shown is the case where the cold electrons have been suppressed ( $y_u = \infty$ ).

One observes two peaks in the profile of the electric field [14,15]. The first peak, which stands at  $x \approx \xi_s t$  (more precisely  $X' \approx 0.5\lambda_{Dh0}$ ), corresponds to the rarefaction shock, and compares favorably with what has been discussed in Sec. III B [compare the inset of Fig. 13 to Fig. 5(b)]. The second peak corresponds to the ion front as discussed in Ref. [16] and observed in Ref. [17]. The first peak is almost independent of time in a  $\xi$ ,  $E$  diagram, while the second peak shifts logarithmically toward large values of  $\xi$  with an amplitude going to 0 as  $2E_u/\omega_{pih}t$ .

The time evolution of the ion front velocity (corresponding to the second peak in Fig. 13) is illustrated in Fig. 14 for  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$ . Also shown is the case where the cold electrons have been suppressed ( $y_u = \infty$ ). One observes that the difference between the two curves is mainly due to the initial phase of the ion acceleration, where the cold

electrons slightly enhance the strength of the accelerating field, as discussed for initial time  $t = 0$  in Refs. [18,19].

Finally, the velocity spectrum is shown in Fig. 15 for the same parameters as in Fig. 12. The spectrum is normalized to time, as the number of accelerated ions increases almost linearly with time. One recognizes on the spectrum the low velocity part corresponding to the expansion dominated by the cold electrons (line A-B in Fig. 2), the dip corresponding to the shock (line B-E), the peak corresponding to the plateau (line E-F), and the high velocity part corresponding to the expansion dominated by hot electrons (right of F) down to the velocity cutoff.

## V. CONCLUSION

A complete theory of rarefaction shocks occurring in a plasma with a bi-Maxwellian electron distribution function has been presented in this paper. The existence of the shock results from the breakdown of the self-similar model that happens when the ratio between the hot and the cold electron temperature is larger than  $5 + \sqrt{24} \approx 9.9$ .

Two main cases were distinguished. In the standard case (Secs. III A–III C), corresponding to low values of the hot electron density in the unperturbed plasma, the plasma can be divided into five different regions: the unperturbed region of the plasma, a zone of expansion dominated by the cold electrons, the rarefaction shock itself, a plateau, and finally a zone of expansion dominated by the hot electrons ending at the ion front. The various quantities characterizing the expansion have been accurately determined. The rarefaction shock structure and the ion front structure are determined by charge-separation effects and involve the local Debye length. The other characteristics of the expansion can be determined by a self-similar analysis and a classical Hugoniot treatment of the discontinuity.

The supersonic rarefaction shock case (Sec. III D) corresponds to intermediate values of the hot electron density in the unperturbed plasma. In this case, the rarefaction shock is directly connected to the unperturbed plasma, and the rarefaction shock propagates inside the plasma at a supersonic velocity.

Numerical simulations with a one-dimensional hybrid code confirmed our findings, and show that the rarefaction shock leads to a dip in the velocity spectrum, the depth of which increases with time. On the other hand, the maximum ion velocity is mainly dependent on the hot electrons component of the electron distribution function.

In our analysis, the unperturbed densities  $n_{hu}$  and  $n_{cu}$  are assumed to be independent of time, as well as the hot and cold electron temperatures  $T_h$  and  $T_c$ . This means that the unperturbed plasma is an infinite source of particles and energy. For a finite plasma foil, the number of particles is conserved, and the electron distribution function may vary in time, in particular, due to the energy exchange with ions [13,20]. For instance, it has been shown recently in the case of an initial single Maxwellian distribution function that the electron distribution function is strongly modified by the expansion, resulting in a surprising acceleration of the rarefaction wave in spite of the overall loss of energy of the electrons [21,22]. The corresponding study in the case of an initial bi-Maxwellian distribution function is left for another paper.

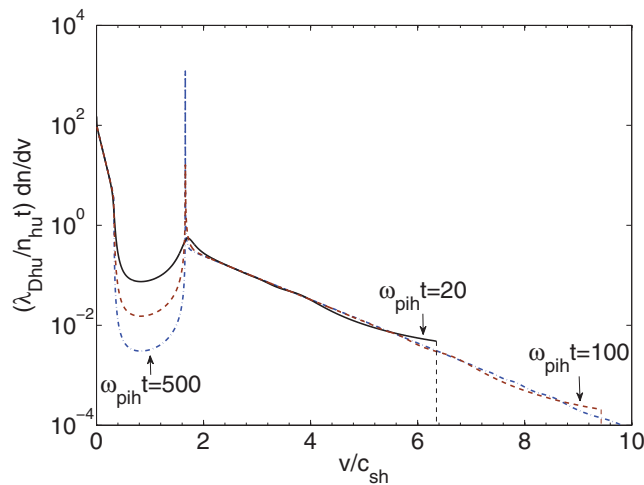


FIG. 15. (Color online) Normalized ion velocity spectrum as a function of time for the same parameters as in Fig. 12, i.e.,  $\alpha = 10^2$  and  $y_u = 10^{-2}$  and for  $\omega_{pih}t = 20, 100$ , and  $500$ .

- [1] S. D. Baton *et al.*, [Plasma Phys. Controlled Fusion](#) **47**, B777 (2005).
- [2] M. Borghesi, J. Fuchs, S. V. Bulanov, A. J. Mackinnon, P. K. Patel, and M. Roth, *Fusion Sci. Technol.* **49**, 412 (2006).
- [3] J. Fuchs *et al.*, [Nat. Phys.](#) **2**, 48 (2006).
- [4] L. Robson *et al.*, [Nat. Phys.](#) **3**, 58 (2007).
- [5] L. M. Wickens, J. E. Allen and P. T. Rumsby, [Phys. Rev. Lett.](#) **41**, 243 (1978).
- [6] B. Bezzerides, D. W. Forslund and E. L. Lindman, [Phys. Fluids](#) **21**, 2179 (1978).
- [7] L. M. Wickens and J. E. Allen, [J. Plasma Phys.](#) **22**, 167 (1979).
- [8] H. A. Bethe, in *Classic Papers in Shock Compression Science*, edited by J. W. Johnson and R. Cheret (Springer, Heidelberg, 1998), p. 417.
- [9] Ya. B. Zeldovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Dover, New York, 2002), p. 67 and p. 757.
- [10] R. L. Morse and C. W. Nielson, [Phys. Fluids](#) **16**, 909 (1973).
- [11] V. T. Tikhonchuk, A. A. Andreev, S. G. Bochkarev, and V. Y. Bychenkov, [Plasma Phys. Controlled Fusion](#) **47**, B869 (2005).
- [12] P. Mora, [Phys. Plasmas](#) **12**, 112102 (2005).
- [13] P. Mora, [Phys. Rev. E](#) **72**, 056401 (2005).
- [14] J. Denavit, [Phys. Fluids](#) **22**, 1384 (1979).
- [15] M. A. True, J. R. Albritton, and E. A. Williams, [Phys. Fluids](#) **24**, 1885 (1981).
- [16] P. Mora, [Phys. Rev. Lett.](#) **90**, 185002 (2003).
- [17] L. Romagnani *et al.*, [Phys. Rev. Lett.](#) **95**, 195001 (2005).
- [18] V. Y. Bychenkov, V. N. Novikov, D. Batani, V. T. Tikhonchuk, and S. G. Bochkarev, [Phys. Plasmas](#) **11**, 3242 (2004).
- [19] M. Passoni, V. T. Tikhonchuk, M. Lontano, and V. Y. Bychenkov, [Phys. Rev. E](#) **69**, 026411 (2004).
- [20] V. F. Kovalev, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **122**, 264 (2002) [[Sov. Phys. JETP](#) **95**, 226 (2002)].
- [21] T. Grismayer, P. Mora, J. C. Adam, and A. Héron, [Phys. Rev. E](#) **77**, 066407 (2008).
- [22] P. Mora and T. Grismayer, [Phys. Rev. Lett.](#) **102**, 145001 (2009).

# Thin-foil expansion into a vacuum with a two-temperature electron distribution function

A. Diaw and P. Mora\*

*Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, Centre National de la Recherche Scientifique, 91128 Palaiseau, France*

(Received 5 June 2012; published 7 August 2012)

A kinetic theory of the expansion into a vacuum of a plasma thin foil with initially a hot and a cold Maxwellian electron population is examined with a one-dimensional kinetic code. Whereas hot electrons always lose energy to expanding ions, cold electrons can either gain or lose energy depending on the initial temperature and density ratios and on time. When the cold electrons' density is not too large, they experience initially an adiabatic compression by the electric field associated with the rarefaction wave. The corresponding temperature increase can be as large as a factor of a few tens. Later on, as expected, the cold electrons eventually lose energy to the expansion. When cold electrons are numerically dominant, a rarefaction shock appears during the first phase of the expansion. Hot electrons cool down faster than cold electrons, thus reducing the effective temperature ratio. Furthermore, the amplitude of the rarefaction shock and the dip that it causes on the ion velocity spectrum tend to be smoothed out by the expansion.

DOI: [10.1103/PhysRevE.86.026403](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.026403)

PACS number(s): 52.38.Kd, 52.40.Kh, 52.25.-b, 52.65.Ff

## I. INTRODUCTION

The interactions of an ultraintense laser pulse with a solid target can generate ion beams with interesting optical properties [1], high laminarity [2], low divergence [3], and a high energy spectrum [4], which open up many opportunities for their applications in fields such as fast ignition [5], cancer therapy [6], and radiology [7]. Such prospects renew the interest in theoretical studies of plasma expansion into a vacuum [8–13].

In particular, the expansion into a vacuum of a plasma made up of two electron populations, characterized by two electron temperatures, has been the subject of several analytical and numerical works [13–19]. For a semi-infinite plasma, Bezzerides *et al.* [15] demonstrated the occurrence of a rarefaction shock in a plasma composed of two populations of electrons when the ratio of the hot to the cold electron temperatures is larger than  $5 + \sqrt{24}$ . A recent paper [19] extended this work and gave a complete description of the structure of the rarefaction shock and of its influence on the ion acceleration mechanism.

For a thin foil, contrary to the semi-infinite case, one cannot consider that there is an infinite source of particles and energy. In particular the electron hot and cold temperatures become time dependent [13,17], as electrons globally transfer their energy to the ions during the expansion. Moreover, one may expect that each electron population deviates from a Maxwellian distribution function, an effect not usually taken into account in simple fluid models such as those used in Refs. [13,17]. Such kinetic effects in plasma expansion have already been observed in the case of a one-temperature electron distribution function and lead to strong deviations with respect to a Maxwellian distribution function of the same mean energy and to a surprising acceleration of the rarefaction wave [20,21].

In this paper we extend this work by considering kinetic effects in the one-dimensional collisionless expansion into a vacuum of a thin foil with two electron populations. Initially each electron population is described by a Maxwellian distribution function, but the expansion does not preserve the

Maxwellian character of each population. We study both the case where the cold electron density is lower than the hot electron density and the more realistic case where the cold electron density is larger than the hot electron density.

## II. ELECTRON KINETIC MODEL FOR PLASMA EXPANSION

### A. General features

We performed simulations with a nonrelativistic kinetic code describing the collisionless expansion of a one-dimensional plasma slab. The code is fully described in Ref. [20]; it has been validated by detailed comparisons with particle-in-cell simulations. Here we only recall its most peculiar features. The electron dynamics is described by the Vlasov equation, which reads in one-dimensional geometry as

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v \frac{\partial f_e}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f_e}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

where  $f_e(x, v, t)$  is the electron distribution function,  $e$  is the elementary charge,  $m_e$  is the electron mass, and  $\Phi(x, t)$  is the electrostatic potential. The ions are initially at rest. They are treated as particles and their movement is governed by the equation of motion

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2)$$

where  $v_i$  is the ion velocity,  $Z$  is the ion charge number, and  $m_i$  is the ion mass. The electrostatic potential  $\Phi$  satisfies Poisson's equation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - Zn_i), \quad (3)$$

where  $n_e$  is the electron density and  $n_i$  is the ion density.

In order to solve the Vlasov equation we use a method of separation of time scales [22] between the characteristic time of variation of the potential and the transit time of an electron into this potential. This time scale separation is a consequence of the smallness of the mass ratio  $m_e/m_i$ . It allows us to build an adiabatic motion invariant so that we can reconstruct the

\*patrick.mora@cphpt.polytechnique.fr

distribution function of the electrons at any time and at any position by following the time evolution of the total energy of a limited number of electrons (typically less than 100). The time step  $\Delta t$  is chosen to satisfy the plasma stability and in most cases is such that  $\Delta t = 0.2 / \max(\omega_{\text{pih}}, \omega_{\text{pic}})$ , where  $\omega_{\text{pih}} = (Zn_{h0}e^2/m_i\epsilon_0)^{1/2}$  and  $\omega_{\text{pic}} = (Zn_{c0}e^2/m_i\epsilon_0)^{1/2}$ .

We consider the expansion into a vacuum of a plasma slab with initial width  $L$ . The initial ion density is defined as  $n_i = n_0$  for  $|x| \leq L/2$  and  $n_i = 0$  for  $|x| > L/2$ , where  $x$  is the direction normal to the target ( $x = 0$  corresponds to the center of the foil). As the expansion is symmetric with respect to the target center, one may restrict the calculation to the positive part of the plasma slab.

The electron population is composed of a hot component and a cold component corresponding respectively to distribution functions  $f_h(x, v, t)$  and  $f_c(x, v, t)$  and densities

$$n_{h,c}(x, t) = \int f_{h,c}(x, v, t) dv, \quad (4)$$

with  $f_e = f_h + f_c$  and  $n_e = n_h + n_c$ . Initially these two components are represented by Maxwellian distribution functions  $f_{h0}$  and  $f_{c0}$  with

$$f_{h0}(x, v) = n_{h0} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_{h0}} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\mathcal{E}}{k_B T_{h0}} \right), \quad (5)$$

where  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $T_{h0}$  is the initial hot temperature, and  $\mathcal{E}$  is the total energy of the electron  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e v^2 - e\Phi$ . A similar expression can be written for  $f_{c0}(x, v)$ , with  $n_{h0}$  replaced by  $n_{c0}$  and  $T_{h0}$  replaced by  $T_{c0}$ , where  $T_{c0}$  is the initial cold temperature. The densities  $n_{h0}$  and  $n_{c0}$  verify  $n_{h0} + n_{c0} = Zn_0$  and the electrostatic potential adjusts itself so that Eq. (3) is verified everywhere and  $\partial\Phi/\partial x \rightarrow 0$  when  $|x| \rightarrow \infty$  (which ensures global neutrality).

Though the distribution functions do not remain Maxwellian during the expansion, it is still possible to define a hot and a cold electron temperature at any time and any position, with

$$k_B T_h(x, t) = \frac{m_e \int v^2 f_h(x, v, t) dv}{n_h(x, t)}, \quad (6)$$

and a similar expression for  $T_c(x, t)$ , with  $f_h$  and  $n_h$  replaced by  $f_c$  and  $n_c$ . One can also define a global temperature  $T_h(t)$  by averaging  $T_h(x, t)$  over the simulation box,

$$T_h(t) = \frac{\int n_h(x, t) T_h(x, t) dx}{\int n_h(x, t) dx}, \quad (7)$$

with a similar expression for the global temperature  $T_c(t)$ , with  $n_h$  and  $T_h$  replaced by  $n_c$  and  $T_c$ .

For convenience we define the two dimensionless parameters

$$y = n_{h0}/n_{c0}, \quad \alpha = T_{h0}/T_{c0}. \quad (8)$$

In all our simulations the ratio of the hot to cold electron temperature satisfies  $\alpha \gg 1$ .

The initial ion acoustic velocity is given by

$$c_{s0} = c_{sh0} \sqrt{\frac{1+y}{\alpha+y}}, \quad (9)$$

where  $c_{sh0}$  is the ion acoustic velocity, which would be due to hot electrons only,

$$c_{sh0} = \sqrt{\frac{Zk_B T_{h0}}{m_i}}. \quad (10)$$

We define the characteristic time

$$\tau = L/c_{sh0}, \quad (11)$$

which is approximately twice the disassembly time of the foil in the absence of cold electrons [20,21,23]. Unless specified otherwise, the plasma slab has an initial width  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ , where  $\lambda_{Dh0} = (\epsilon_0 k_B T_{h0}/n_{h0}e^2)^{1/2}$ .

### B. Semi-infinite case

It is instructive to first recall the main results corresponding to the semi-infinite case [15,19]. Figure 1 illustrates the profile of the electrostatic potential obtained in the quasineutral limit for a semi-infinite plasma, with  $\alpha = 10^2$  and  $y = 10^{-2}$ . The following regions are identified: the unperturbed plasma on the left of the rarefaction wave situated in A, an expansion dominated by cold electrons between A and B, the rarefaction shock joining B and E, a plateau between E and F, and an expansion dominated by hot electrons on the right of F. The dashed line corresponds to the mathematical multivalued solution obtained by solving  $\xi$  as a function of  $\phi$  (see Ref. [19] for details).

In the limit  $\alpha \gg 1$ , the expressions of the density ratios corresponding to the positions B and D are given by [19]

$$y_B \approx \frac{2.22}{\sqrt{\alpha}} + \frac{4.57}{\alpha}, \quad (12)$$

$$y_D \approx \frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha \quad (13)$$

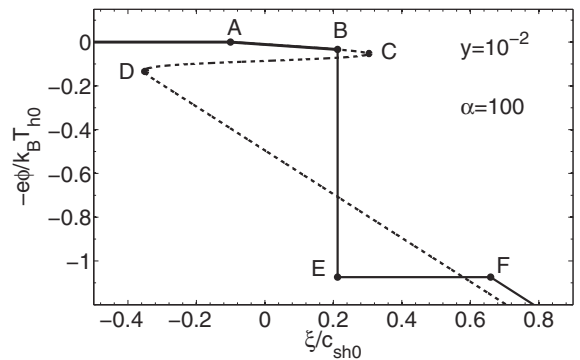


FIG. 1. Semi-infinite case ( $L \rightarrow \infty$ ). Electric potential  $\phi$  as a function of the self-similar parameter  $\xi = (|x| - L/2)/t$ , calculated in the quasineutral limit for  $\alpha = 10^2$  and  $y = 10^{-2}$ . Here  $\xi = 0$  corresponds to the edge of the foil at  $t = 0$ . The curve shows a rarefaction shock and a plateau on the downstream side of the shock. Also shown (as a dashed line) is the mathematical multivalued solution obtained by solving  $\xi$  as a function of  $\phi$ . (This figure is adapted from Fig. 2 of Ref. [19].)

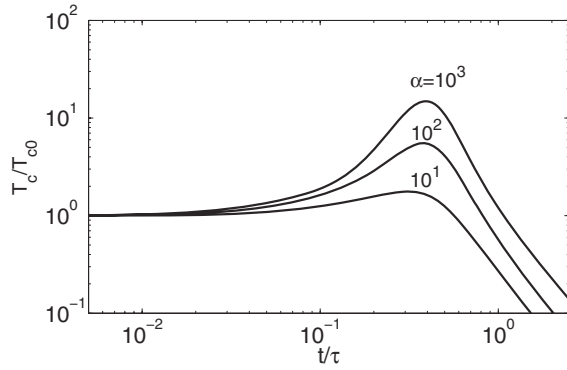


FIG. 2. Cold electron mean temperature as a function of time for  $y = 10^4$ ,  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ , and  $\alpha = 10$ ,  $10^2$ , and  $10^3$ .

and the position of the rarefaction shock  $\xi_B$  is given (for  $y_B > y$ ) by

$$\xi_B \approx \left[ \ln \left( \frac{y_B}{y} \right) + \frac{y}{2} - y_B - 1 \right] \frac{c_{sh0}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (14)$$

Depending on  $y$ , one may in fact distinguish three main regimes [19].

(i) When  $y_B > y$ , the structure of the flow is as depicted in Fig. 1. The rarefaction wave moves towards the plasma at the ion acoustic velocity  $c_{s0} \approx c_{sc0} = (Zk_B T_{c0}/m_i)^{1/2}$ . The rarefaction shock moves towards either the vacuum when  $\xi_B > 0$  or the plasma when  $\xi_B < 0$ . The two subregimes' frontier is given by setting  $\xi_B = 0$  in Eq. (14), i.e.,  $y \approx 0.82/\sqrt{\alpha}$ .

(ii) When  $y_D > y > y_B$ , the region of the flow dominated by cold electrons disappears and the unperturbed plasma is directly connected to the rarefaction shock. In addition, the shock propagates inside the plasma at a supersonic velocity, intermediate between  $c_{s0}$  and  $c_{sh0}$ .

(iii) When  $y > y_D$ , the flow is entirely dominated by hot electrons and there is no more rarefaction shock. The rarefaction wave moves towards the plasma at the ion acoustic velocity  $c_{s0} \approx c_{sh0}$ . The cold electrons behave as test particles.

Regime (i) is relevant for most experiments where the hot electrons are a minor fraction of the total number of electrons. However, the two other regimes show interesting features, which we will first present in the following section.

### III. EXPANSION DOMINATED BY HOT ELECTRONS

In this section we consider the case where the expansion is dominated by hot electrons, corresponding to regime (iii) of the preceding section or to regime (ii) in the case where the rarefaction shock amplitude is negligible. As a first approximation, the thin-foil expansion is driven by hot electrons only and is described in Ref. [21]. It can be separated into two phases. In the first phase ( $t \lesssim 0.4\tau$ ), a rarefaction wave progresses towards the center of the foil. For time  $t \gtrsim 0.4\tau$  the whole foil disassembles.

The cold electrons can be considered as test particles as they do not modify significantly the characteristics of the expansion. Figure 2 shows the time evolution of the global cold temperature  $T_c(t)$  for  $y = 10^4$  and for different values of  $\alpha$  ranging from 10 to  $10^3$ .

We observe a heating of the cold electron population during the first phase. The cold temperature increases until a time that corresponds approximately to the arrival of the rarefaction wave at the center of the target, which is  $t_r/\tau \approx 0.4$ . During this first phase of the expansion, the hot electrons supply both the expanding ions and the cold electrons with energy. Beyond this time, the cold electrons start cooling down and both hot electrons and cold electrons transfer their energy to the ions. As expected, this heating is more efficient with higher values of the temperature ratio  $\alpha$ . The heating is as large as a factor of 15 for  $\alpha = 10^3$  when the rarefaction wave reaches the center of the foil.

To interpret these results, we present simple analytic considerations. Let us first consider the initial phase of the expansion  $\lambda_{Dh0} \ll c_{sh0}t \ll L$ . A self-similar expansion is established on both sides of the foil, with

$$e\Phi(x,t) \simeq -k_B T_{h0} [1 + (|x| - L/2)/c_{sh0}t]. \quad (15)$$

One can use the results of Refs. [20,21,24] to calculate the energy variation rate of a slow electron due to the energy exchange in the time-varying electrostatic fields on both sides of the foil,

$$d\mathcal{E}/dt \simeq 4\mathcal{E}/\tau, \quad (16)$$

where  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e v^2$  ( $\mathcal{E} \ll k_B T_{h0}$ ). To first order in  $t$ , one can express the energy  $\mathcal{E}(t)$  of a slow electron as a function of its initial energy  $\mathcal{E}_0$  and invert to obtain

$$\mathcal{E}_0 \simeq (1 - 4t/\tau)\mathcal{E}(t). \quad (17)$$

Now using the fact that the value of the distribution function is conserved along each electron trajectory, one gets in the inner part of the foil ( $|x| + c_{sh0}t < L/2$ )

$$f_c(x,v,t) \simeq \left( 1 + \frac{2m_e v^2}{k_B T_{c0}} \frac{t}{\tau} \right) f_{c0}(v) \quad (18)$$

and

$$n_c(t) \simeq n_{c0}(1 + 2t/\tau), \quad (19)$$

$$T_c(t) \simeq T_{c0}(1 + 4t/\tau). \quad (20)$$

These two equations show that the cold electrons are adiabatically compressed by the electrostatic potential, with  $T_c \propto n_c^{\gamma-1}$  and  $\gamma = 3$ . One can go a little bit further in the analysis by noticing that the cold electrons are in fact confined by the electrostatic potential to the region that has not been attained by the rarefaction wave. The width of this region is approximately given by

$$L_c(t) \simeq L - 2c_{sh0}t = L(1 - 2t/\tau). \quad (21)$$

The cold electron density goes up as  $n_c(t) \simeq n_{c0}L/L_c$  and the cold electron temperature as  $T_c(t) \simeq T_{c0}(L/L_c)^2$ , i.e.,

$$T_c(t) \simeq \frac{T_{c0}}{(1 - 2t/\tau)^2}. \quad (22)$$

The first-order expansion of Eq. (22) in power of  $t/\tau$  coincides with Eq. (20). However, it is clear from Fig. 3, which shows the numerical result and the two analytical expressions (20) and (22), that Eq. (22) gives a better account of the temperature behavior for intermediate time.



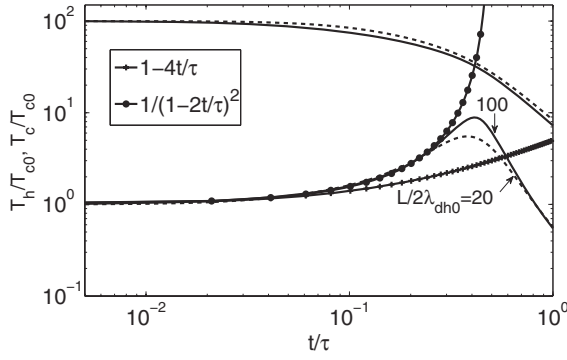


FIG. 3. Temporal evolution of the cold and hot electron mean temperatures for  $\alpha = 10^2$  and  $y = 10^4$ . The initial widths of the plasma are  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  (dashed lines) and  $L/2\lambda_{Dh0} = 100$  (solid lines). The plus sign line is the result of Eq. (20), while the black circle line corresponds to Eq. (22).

The above analysis becomes invalid when the rarefaction wave reaches the center of the foil. To estimate the maximum temperature attained by the cold electrons, we assume that when the rarefaction wave reaches the center of the foil the electrostatic potential is still given by Eq. (15) with  $t = \tau/2$  and  $T_{h0}$  replaced by  $T_h(t = \tau/2) \approx T_{h0}/3$ , i.e.,

$$e\Phi(x, t = \tau/2) \simeq -\frac{2}{3}k_B T_{h0} \frac{|x|}{L}, \quad (23)$$

and that the cold electrons extension  $L_{c,min}$  is such that  $e|\Phi(L_{c,min}/2)| \approx k_B T_{c,max}$ , with again  $T_{c,max}(t) \simeq T_{c0}(L/L_c)^2$ , so that

$$k_B T_{c,max} \approx k_B T_c (\alpha/3)^{2/3}, \quad (24)$$

in good agreement with the numerical results for  $L/2\lambda_{Dh0} \geq 100$ .

Note here that the temperature increase we observe in Fig. 3 is not specific to the kinetic model, as it is also seen, though with a smaller amplitude, with a hybrid code, where the hot and cold distribution functions are forced to stay Maxwellian at any time [23]. To illustrate this assertion, we plot in Fig. 4 the cold electron mean temperature versus time obtained with the present kinetic code and with the hybrid code of Ref. [23], for  $\alpha = 10^2$ ,  $y = 10^4$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .

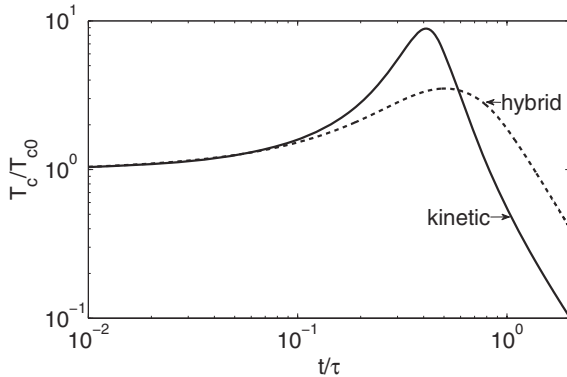


FIG. 4. Temporal evolution of the cold electron mean temperature for  $\alpha = 10^2$ ,  $y = 10^4$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  for the kinetic (solid line) and hybrid (dashed line) models.

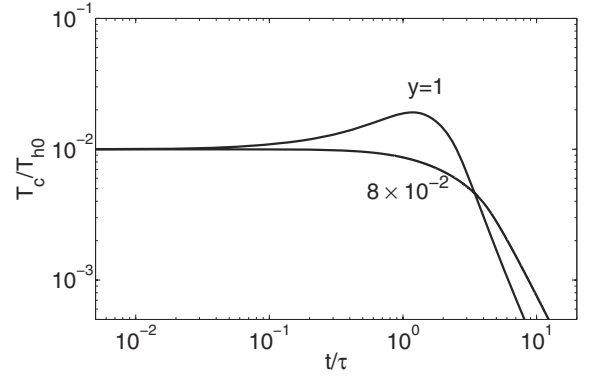


FIG. 5. Temporal evolution of the cold electron mean temperature for intermediate values of  $y$  ( $y = 1$  and  $8 \times 10^{-2}$ ) with  $\alpha = 10^2$  and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .

#### IV. INTERMEDIATE REGIME

Figure 5 illustrates the time variation of the cold electron mean temperature for  $y = 1$  and  $8 \times 10^{-2}$ . As can be seen, the amplification process of the cold electron temperature is reduced for  $y = 1$  and vanishes for  $y = 8 \times 10^{-2}$ . This can be understood easily. When  $y = 1$ , the rarefaction shock propagates inside the plasma at a velocity that is larger than  $c_{s0}$  but smaller than  $c_{sh0}$  and the corresponding potential jump compresses and adiabatically heats the cold electron component, in a way similar to what was described in the preceding section.

When  $y = 8 \times 10^{-2}$  the rarefaction shock almost stays at the edge of the plasma as  $\xi_B \approx 0$  according to Eq. (14) and no cold electron compression and heating occur. Eventually, as the hot electron temperature and density go down due to the plasma expansion, the instantaneous value of  $\xi_B$  increases with time, leading to a decrease of the cold electron density and temperature.

#### V. REGIME DOMINATED BY COLD ELECTRONS

The studies of the preceding sections were somewhat academic in the sense that the values of the initial ratios of the densities  $y$  in the undisturbed plasma were quite different from those that occur in the interaction of an ultrahigh intense

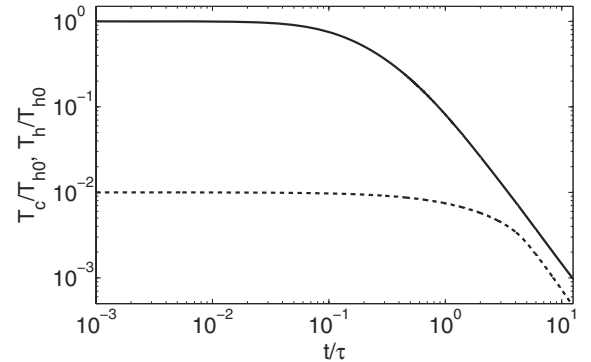


FIG. 6. Temporal evolution of the hot (solid line) and cold (dashed line) electron mean temperature for  $y = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^2$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .

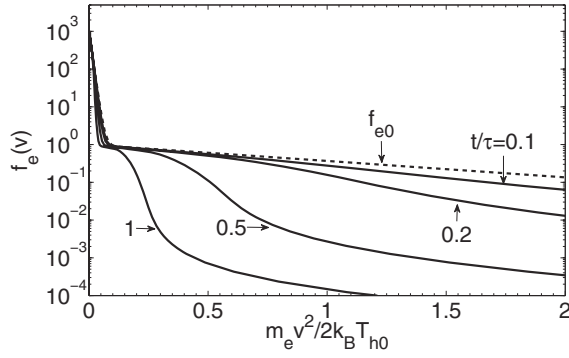


FIG. 7. Electron distribution function for a plasma slab with initial parameters  $\alpha = 10^2$ ,  $y = 10^{-2}$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$  and at different times  $t/\tau = 0, 0.1, 0.2, 0.5$ , and  $1$ . The distribution function is taken at the center of the plasma slab  $x = 0$  and is normalized to  $f_{h0}$ .

laser with solid targets. In this section we propose to consider more realistic values of the initial densities ratios, i.e.,  $y \ll 1$ .

### A. Global cooling of electrons

In Fig. 6 we show the time variation of the hot and the cold electron mean temperature for  $y = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^2$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ . Both the cold and hot electrons cool down. However, the hot electrons cool down earlier than cold electrons. The characteristic cooling time is  $\tau$  for hot electrons and  $\tau\sqrt{\alpha}$  for cold electrons (the rarefaction wave velocity is approximately  $c_{s0} \approx c_{sh0}/\sqrt{\alpha}$ ). As the temperature behaves as  $t^{-2}$  for large times, the two curves eventually tend to be quite close.

Let us now discuss the evolution of the electron distribution function for the case of Fig. 6. Figure 7 shows the electron distribution function for a plasma slab with initial parameters  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ ,  $y = 10^{-2}$  and  $\alpha = 10^2$  at different times of the expansion. The electron distribution function is taken at the center of the plasma slab  $x = 0$ . For times  $t \geq \tau$ , the structure of the distribution function that is initially a bi-Maxwellian function moves towards a two top-hat structure.

As demonstrated in Ref. [21] in the case of a single temperature distribution function, the distortion of the electron distribution function initially leads to an increase of the

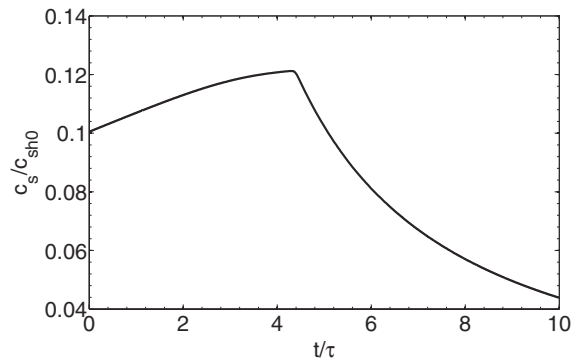


FIG. 8. Ion acoustic velocity at the center of the foil as a function of time for  $\alpha = 10^2$ ,  $y = 10^{-2}$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .

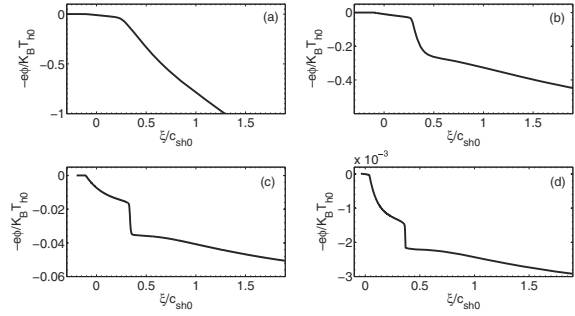


FIG. 9. Electric potential  $\phi$  as a function of  $\xi = (|x| - L/2)/t$  at times (a)  $\omega_{pih}t = 4$ , (b)  $\omega_{pih}t = 20$ , (c)  $\omega_{pih}t = 100$ , and (d)  $\omega_{pih}t = 500$ . The plasma initial parameters are  $\alpha = 10^2$ ,  $y = 10^{-2}$ , and  $L/2\lambda_{Dh0} = 20$ .

ion acoustic velocity and of the rarefaction wave. Once the rarefaction wave has reached the center of the foil, the global cooling of the electrons leads to a decrease of the ion acoustic velocity. This behavior is illustrated in Fig. 8 for the case of Figs. 6 and 7.

### B. Spatial profiles

Figure 9 shows the electric potential as function of  $\xi = (|x| - L/2)/t$  for  $y = 10^{-2}$  and at times  $\omega_{pih}t = 4, \omega_{pih}t = 20, \omega_{pih}t = 100$ , and  $\omega_{pih}t = 500$ . One observes that the structure of the rarefaction shock is still apparent at late time of the expansion, but the value of the potential jump is declining in time. For instance, at time  $\omega_{pih}t = 500$ , the value of the jump of the rarefaction is reduced by more than three orders of magnitude compared to its value for a semi-infinite case. In comparison with the results obtained in the semi-infinite case, we also remark that the expansion tends to reduce the length of the plateau (compare Fig. 9 with Fig. 12 of Ref. [19]).

Figure 10 shows the electric field as a function of  $\xi$  at times  $\omega_{pih}t = 20$  and  $100$ . The electric field is normalized to  $E_0 = (n_{h0}k_B T_{h0}/\epsilon_0)^{1/2}$ . We observe two different peaks. The first one corresponds to the rarefaction shock while the second one is related to the ion front as shown in Refs. [19–21]. The inset

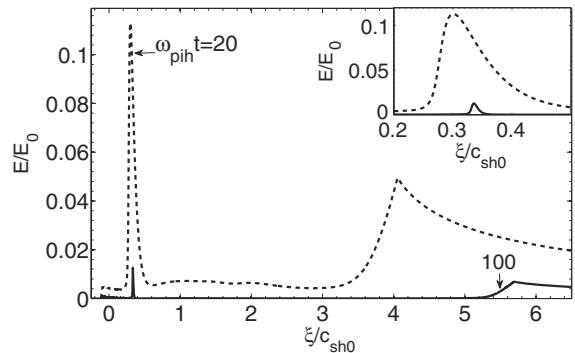


FIG. 10. Electric field as a function of  $\xi = (|x| - L/2)/t$  at times  $\omega_{pih}t = 20$  and  $\omega_{pih}t = 100$ . The plasma slab initial parameters are  $\alpha = 10^2$  and  $y = 10^{-2}$ . The inset is a zoom around the rarefaction shock position. The electric field is normalized to  $E_0 = (n_{h0}k_B T_{h0}/\epsilon_0)^{1/2}$ .

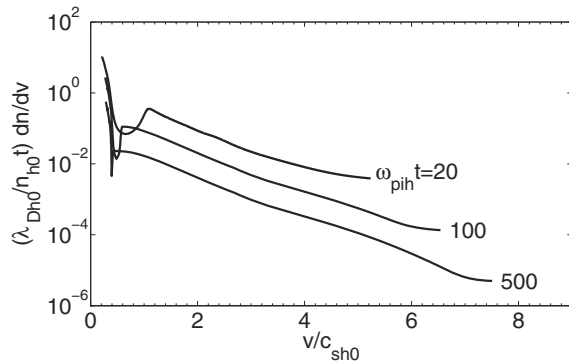


FIG. 11. Normalized ion velocity spectrum versus velocity  $v$  for a plasma foil with the initial parameters  $\alpha = 10^2$  and  $y = 10^{-2}$  and at times  $\omega_{pih}t = 20, 100$ , and  $500$ .

of Fig. 10 represents a zoom of the peak of the electric field in the rarefaction shock. Conversely to the semi-infinite case, the peak associated with the rarefaction shock is not steady in time, but moves slowly towards the vacuum. One also notes that the amplitude of the electric field at the ion front decreases faster than  $2E_0/\omega_{pih}t$ , which is the value corresponding to the semi-infinite case.

### C. Ion velocity distribution

The ion velocity distribution is shown in Fig. 11 for  $y = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^2$ , and at times  $\omega_{pih}t = 20, 100$ , and  $500$ . We observe that the dip in the ion velocity spectra, which increases with time in the semi-infinite case [19], tends to decrease and to narrow here. We also see that the Dirac  $\delta$  function corresponding to the density and velocity plateau of the self-similar solution shown in Ref. [19] seems to completely disappear here.

## VI. CONCLUSION

The expansion of a plasma foil composed of hot electrons and cold electrons with an initially bi-Maxwellian electron distribution function has been studied with a one-dimensional kinetic code. Attention has been focused on the energy exchange between electrons and ions and two main cases have been identified.

When the ratio of the hot to cold electron densities  $y$  is large enough, typically for  $y \geq 10^{-1}$  when  $\alpha = 10^2$ , we demonstrate that the cold electron mean temperature first increases at the expense of hot electrons, due to an adiabatic compression by the electric potential. The cold electron heating takes place during the first phase of the expansion, i.e., while the rarefaction wave moves towards the center of the foil. When the rarefaction wave arrives at the center of the foil, the cold electrons start cooling.

In contrast, when  $y \ll 1$ , as in most experiments, we observe a global cooling of both cold and hot electrons. However, the hot electron temperature decreases initially faster than the cold electron temperature, thus reducing the temperature ratio.

As a result of the electron cooling, the amplitude of the shock and the length of the plateau are deeply reduced. In addition, the dip and the peak observed in the velocity spectrum in the semi-infinite case are almost absent in the case of a thin foil.

Finally, it is important to note that this paper is restricted to a purely one-dimensional expansion. However, due to the anisotropy of the electron distribution function, electromagnetic (Weibel) instabilities are expected to develop during the expansion of the plasma foil if the electron thermal velocity is not too small compared with the light velocity. The anisotropy might exist initially (when the longitudinal electron temperature, i.e., perpendicular to the foil surface, is larger than the transverse electron temperature, i.e., along the foil surface) or appear as a result of the expansion itself (when the longitudinal temperature becomes lower than the transverse temperature, due to the cooling that affects only the longitudinal temperature), as described in Ref. [25]. Though the cold electrons tend to have a stabilizing effect in the early time of the expansion, their role appears less important at long time. The magnetic field due to the instability, by exchanging energy between the longitudinal and the transverse dimensions as binary collisions would do in a collisional plasma, contributes to suppress the anisotropy and thus the source of the instability that usually saturates. It thus gives the expansion a three-dimensional character, with a characteristic adiabatic parameter  $\gamma = 5/3$  instead of  $\gamma = 3$ , eventually giving a time dependence of the temperature  $T \propto t^{-2/3}$  at late times rather than  $T \propto t^{-2}$ . Further details would need a more precise analysis, which is beyond the scope of the present paper.

- 
- [1] J. Fuchs *et al.*, *Nat. Phys.* **2**, 48 (2006).
  - [2] T. E. Cowan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 204801 (2004).
  - [3] P. K. Patel, A. J. Mackinnon, M. H. Key, T. E. Cowan, M. E. Foord, M. Allen, D. F. Price, H. Ruhl, P. T. Springer, and R. Stephens, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 125004 (2003).
  - [4] R. A. Snively *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2945 (2000).
  - [5] M. Tabak *et al.*, *Phys. Plasmas* **1**, 1626 (1994).
  - [6] S. V. Bulanov *et al.*, *Phys. Lett. A* **299**, 240 (2002).
  - [7] M. I. K. Santala *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **78**, 19 (2001).
  - [8] A. V. Gurevich, L. V. Pariiskaya, and L. P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **49**, 647 (1965) [*Sov. Phys. JETP* **22**, 449 (1966)].
  - [9] J. E. Crow, P. L. Auer, and J. E. Allen, *J. Plasma Phys.* **14**, 65 (1975).
  - [10] V. F. Kovalev, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **122**, 264 (2002) [*Sov. Phys. JETP* **95**, 226 (2002)].
  - [11] P. Mora, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 185002 (2003).
  - [12] V. Y. Bychenkov *et al.*, *Phys. Plasmas* **11**, 3242 (2004).
  - [13] P. Mora, *Phys. Rev. E* **72**, 056401 (2005).
  - [14] R. L. Morse and C. W. Nielson, *Phys. Fluids* **16**, 909 (1973).
  - [15] B. Bezzerides, D. W. Forslund, and E. L. Lindman, *Phys. Fluids* **21**, 2179 (1978).



- [16] L. M. Wickens, J. E. Allen, and P. T. Rumsby, [Phys. Rev. Lett. \*\*41\*\*, 243 \(1978\)](#).
- [17] M. A. True, J. R. Albritton, and E. A. Williams, [Phys. Fluids \*\*24\*\*, 1885 \(1981\)](#).
- [18] M. Passoni, V. T. Tikhonchuk, M. Lontano, and V. Y. Bychenkov, [Phys. Rev. E \*\*69\*\*, 026411 \(2004\)](#).
- [19] A. Diaw and P. Mora, [Phys. Rev. E \*\*84\*\*, 036402 \(2011\)](#).
- [20] T. Grismayer, P. Mora, J. C. Adam, and A. Héron, [Phys. Rev. E \*\*77\*\*, 066407 \(2008\)](#).
- [21] P. Mora and T. Grismayer, [Phys. Rev. Lett. \*\*102\*\*, 145001 \(2009\)](#).
- [22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976).
- [23] P. Mora, [Phys. Plasmas \*\*12\*\*, 112102 \(2005\)](#).
- [24] P. Mora and R. Pellat, [Phys. Fluids \*\*22\*\*, 2300 \(1979\)](#).
- [25] C. Thauray, P. Mora, A. Heron, J. C. Adam, and T. M. Antonsen, [Phys. Rev. E \*\*82\*\*, 026408 \(2010\)](#).

## Energy dispersion in radiation pressure accelerated ion beams

**M Grech<sup>1,6</sup>, S Skupin<sup>1,2</sup>, A Diaw<sup>3</sup>, T Schlegel<sup>4</sup>  
and V T Tikhonchuk<sup>5</sup>**

<sup>1</sup> Max-Planck-Institute for the Physics of Complex Systems, D-01187 Dresden, Germany

<sup>2</sup> Friedrich Schiller University, Institute of Condensed Matter Theory and Solid State Physics, D-07743 Jena, Germany

<sup>3</sup> Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France

<sup>4</sup> Helmholtz Institute Jena, D-07743 Jena, Germany

<sup>5</sup> Centre Lasers Intenses et Applications, F-33405 Talence, France

E-mail: [mickael.grech@gmail.com](mailto:mickael.grech@gmail.com)

*New Journal of Physics* **13** (2011) 123003 (20pp)


Received 24 May 2011

Published 1 December 2011

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/13/12/123003

**Abstract.** We address the problem of energy dispersion of radiation pressure accelerated (RPA) ion beams emerging from a thin target. Two different acceleration regimes, namely phase-stable acceleration and multistage acceleration, are considered by means of analytical modeling and one-dimensional particle-in-cell simulations. Our investigations offer a deeper understanding of RPA and allow us to derive some guidelines for generating monoenergetic ion beams.

 Online supplementary data available from [stacks.iop.org/NJP/13/123003/mmedia](http://stacks.iop.org/NJP/13/123003/mmedia)

<sup>6</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.

**Contents**

<b>1. Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2. Basic modeling</b>	<b>3</b>
2.1. Macroscopic approach: the light-sail model . . . . .	3
2.2. Scaling laws for the ion energy . . . . .	4
<b>3. Two radiation pressure acceleration (RPA) regimes</b>	<b>5</b>
3.1. Phase-stable acceleration of thin targets . . . . .	5
3.2. Multistage RPA of thicker targets . . . . .	7
<b>4. Numerical simulations</b>	<b>9</b>
4.1. Optimal target thickness . . . . .	10
4.2. Ion acceleration in the phase-stable regime . . . . .	10
4.3. Ion acceleration in the multistage regime . . . . .	14
<b>5. Conclusion</b>	<b>18</b>
<b>Acknowledgments</b>	<b>19</b>
<b>References</b>	<b>19</b>

**1. Introduction**

Interaction of ultra-intense laser pulses with thin foils offers interesting possibilities to generate energetic charged particles. The so-called radiation pressure acceleration (RPA) of ion bunches has recently attracted much interest as it may provide an efficient way of generating intense quasi-monoenergetic ion beams. In contrast to target normal sheath acceleration (TNSA) [1, 2], where ions are accelerated from the target rear surface (the front surface being the one irradiated by the laser pulse) in the electrostatic field built up by the laser-created hot electrons, RPA of ion beams relies on efficient momentum transfer from laser photons to ions in a thin dense target, which reflects the incident laser pulse. Therefore, RPA may provide a very efficient way to accelerate quasi-neutral ion–electron bunches up to potentially relativistic velocities while keeping the energy dispersion small.

The idea of accelerating (macroscopic) objects by laser radiation pressure was initially discussed by Marx [3] as a possible path toward interstellar space travel. Its application to efficient ion acceleration was first proposed in [4], where the authors show that, in order to observe efficient RPA with linearly polarized light, ultra-high laser intensities ( $I_L \gtrsim 10^{23} \text{ W cm}^{-2}$ ) are required. For lower intensities, indeed, strong laser-induced electron heating makes target expansion the dominant acceleration mechanism. In 2005, Macchi *et al* [5] demonstrated that using circularly polarized (CP) laser light strongly reduces electron heating, thus allowing RPA to operate efficiently at lower intensities. After that, different teams have discussed independently the possibility of creating quasi-monoenergetic ion beams by irradiating a thin target with an intense CP laser pulse [6–9]. Many studies have followed, some proposing and/or revisiting different acceleration models or discussing the optimal laser–target parameters through one-dimensional (1D) and 2D particle-in-cell (PIC) simulations [10–13]. Multi-dimensional effects on the stability of the accelerated foil and their potential capability to improve RPA have also been discussed [14–16]. Finally, the first experimental confirmation of RPA was claimed recently [17].

While the basic mechanisms of RPA are now well understood, the control of the energy dispersion in RPA ion beams has not been fully addressed. This paper is intended to provide the reader with guidelines on how to achieve this control. To do so, we first recall the basic modeling of RPA of a thin foil and provide scaling laws concerning the maximum ion energy that can be reached as a function of laser intensity or power (section 2). Beyond this simple (macroscopic) modeling, we discuss the details of RPA of a thin foil as following from two complementary processes. For the thinnest foils, electrons are piled up at the target rear side by the strong radiation pressure. Ion acceleration then proceeds in the so-called phase-stable way [9], where ions are continuously accelerated in the resulting charge-separation field. In contrast, thick enough targets undergo multiple successive hole-boring stages so that ion acceleration occurs as a discontinuous, multi-step process [6, 7]. In section 3, we propose some refined models for both acceleration processes and extract the main requirements for controlling the resulting ion energy dispersion. These analytical findings are compared to numerical PIC simulations in section 4. Finally, we present our conclusions in section 5.

## 2. Basic modeling

In this paper, all quantities are normalized to laser- and electron-related units. Times and distances are normalized to the incident laser frequency  $\omega_L$  and wave number  $k_L = \omega_L/c$ , respectively, and velocities are normalized to the light velocity  $c$ . Electric charges and masses are normalized to the electron charge  $e$  and mass  $m_e$ , respectively. Densities are normalized to the critical density at the considered laser wavelength  $\lambda_L = 2\pi/k_L$ :  $n_c = \epsilon_0 m_e \omega_L^2 / e^2$ , where  $\epsilon_0$  is the permittivity of free space. Electric fields are normalized to the Compton field  $E_C = m_e c \omega_L / e$ . Furthermore, we consider a CP laser pulse and introduce the incident laser pulse vector potential:

$$\mathbf{A}_L(t, x) = \frac{a_L(t)}{\sqrt{2}} [\cos(t - x) \hat{\mathbf{y}} + \sin(t - x) \hat{\mathbf{z}}], \quad (1)$$

where  $\hat{\mathbf{y}}$  and  $\hat{\mathbf{z}}$  denote the unit vectors pointing in the two directions transverse to the laser propagation direction  $\hat{\mathbf{x}}$ .

### 2.1. Macroscopic approach: the light-sail model

A straightforward and elegant way of deriving the energy ions gain during the acceleration of a thin target by laser radiation pressure is to consider the accelerated layer as a quasi-neutral light sail reflecting the incident laser pulse [4]. Acceleration then follows from momentum transfer from the laser photons to the ions. Assuming that all ions in the target have the same velocity  $v_i^{(l)}$  in the laboratory frame, the equation of motion for the target is obtained by equating the photon momentum flux to the ion momentum flux, which follows from the target acceleration  $(n_{i0} d_0) dp_i^{(l)} / dt$ , where  $p_i^{(l)}$  is the ion momentum in units of  $m_e c$ ,  $n_{i0}$  is the initial target ion density and  $d_0$  its thickness. For arbitrary target velocities, two effects—the reduction of the photon flux on the target and the Doppler shift lowering of the photon momenta in the target frame—must be taken into account. Considering total reflection of the laser pulse in the target frame, one obtains

$$(n_{i0} d_0) \frac{d}{dt} p_i^{(l)} = a_L^2 [t - x_i(t)] \gamma_i^2 (1 - v_i^{(l)})^2, \quad (2)$$

where  $a_L^2(t)$  is the normalized laser intensity,  $x_i(t)$  is the time-dependent position of the target moving with the velocity  $v_i^{(l)}$ , and  $\gamma_i = (1 - v_i^{(l)2})^{-1/2}$  is the associated Lorentz factor. The solution of equation (2) has been derived, e.g. in [8], for a laser pulse with an idealized step-like temporal profile ( $a_L^2(t) = a_0^2$  for  $t > 0$  and  $a_L^2(t) = 0$  otherwise), with the maximum laser field amplitude  $a_0$ :

$$p_i^{(l)}(t) = m_i [\sinh\phi - (4 \sinh\phi)^{-1}], \quad (3)$$

where  $\phi = (1/3) \sinh^{-1}(3 a_0^2 t / (n_{i0} m_i d_0) + 2)$  and  $m_i$  is the ion mass.

At this point, we stress that, in the derivation of equation (2), (i) the electron momenta have been neglected and (ii) the target is assumed to be thin enough to be accelerated as a whole, quasi-neutral bunch, but thick enough to support the laser radiation pressure. Both assumptions are discussed in more detail in section 3.

## 2.2. Scaling laws for the ion energy

Let us now derive some scaling laws for the ion energy  $\mathcal{E}_i = (\gamma_i - 1) m_i$  (in units of  $m_e c^2$ ). First, equation (3) can be simplified in the limit of non-relativistic ions ( $p_i^{(l)} \ll 1$ ), leading to  $p_i^{(l)}(t) \sim a_0^2 t / (n_{i0} d_0)$  and ion energies:

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{m_i}{2} \left( \frac{a_0^2 t}{m_i n_{i0} d_0} \right)^2. \quad (4)$$

This result suggests that the ion energy scales with the square of the laser intensity  $I_L = a_0^2$  (in units of  $c^3 m_e n_c / 2$ ) and more precisely with the square of the laser fluence  $\phi_L = \int_0^t a_L^2(t) dt$  (in units of  $c^3 m_e n_c / (2 \omega_L)$ ). However, this scaling applies only for sufficiently short laser pulses. Indeed, if the laser pulse is long enough for the target to travel over a distance larger than the laser Rayleigh length  $L_R \sim w_L^2$  ( $w_L$  is the transverse size of the laser focal spot), diffraction of the laser pulse must be accounted for<sup>7</sup>. It sets in after a time  $t \sim \sqrt{2 m_i n_{i0} d_0} w_L / a_0$ , so that the final ion energy is limited to  $\mathcal{E}_i \sim a_0^2 w_L^2 / (n_{i0} d_0)$ . For a sufficiently long laser pulse, the ion energy thus scales (only) linearly with the laser intensity. More precisely, one can introduce the normalized laser power onto the target,  $P_L \sim a_0^2 w_L^2$  (in units of  $m_e n_c c^3 / (2 k_L^2)$ ), and we obtain that the final ion energy scales linearly with the laser power.

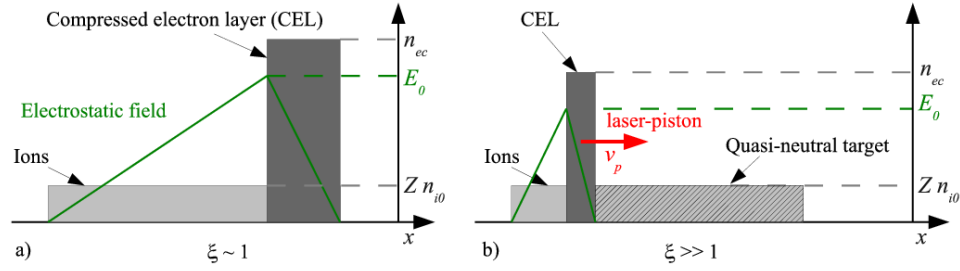
Considering characteristic diamond-like carbon (DLC) targets ( $m_i = 12 \times 1836$ ,  $n_{i0} = 60$  at  $\lambda_L = 1 \mu\text{m}$ ) with thickness  $d_0 / \lambda_L = 10^{-2}$  ([18] and references therein) irradiated by a tightly focused laser pulse ( $w_L / \lambda_L = 5$ ), we find that relativistic carbon ions may be obtained using a 100 TW (1 PW) laser with pulse duration  $\sim 200$  fs ( $\sim 20$  fs). Hence, relativistic ion production may be possible on already (or soon to be) available laser facilities.

Finally, equation (3) can also be simplified in the limit of ultrarelativistic ions  $p_i^{(l)} \gg 1$ :

$$\mathcal{E}_i \sim p_i^{(l)} \sim \frac{m_i}{2} \left( \frac{6 a_0^2 t}{m_i n_{i0} d_0} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

The ion energy thus increases as  $t^{1/3}$ . This characteristic evolution was first reported in the original paper by Esirkepov *et al* [4]. In the ultra-relativistic regime,  $v_i^{(l)} \sim 1$ , and diffraction

<sup>7</sup> Our estimates of the effect of laser beam diffraction are quite rough as we aim at deriving simple scaling laws for the ion energy. As discussed in [16], the target deformation during the acceleration process may actually prevent the laser beam diffraction and thus allows for enhanced ion energies.



**Figure 1.** Schematic picture of RPA once the balance between electrostatic and radiation pressures is reached. (a) In the phase-stable regime ( $\xi \sim 1$ ): the target rear side is continuously accelerated. (b) In the multistage regime ( $\xi \gg 1$ ): the laser acts as a piston and ion acceleration occurs sequentially.

sets in after a time  $t \sim w_L^2$ . The final ion energy then scales as the power  $1/3$  of both the laser intensity and power. This is mainly because of photon red-shifting and the reduced photon flux onto the target due to its relativistic recoil.

### 3. Two radiation pressure acceleration (RPA) regimes

A deeper insight into RPA of thin targets requires us to investigate more closely the structure of the accelerated target. When exposed to an intense laser pulse, the target electrons are pushed forward into the target by the laser ponderomotive force, thus forming a compressed electron layer (CEL) at the laser front. The formation of this layer occurs in a very short time as it involves only electron motion. Its characteristic position  $l_c$  before ion motion sets in can be easily derived from equating the electrostatic pressure  $(Z n_{i0} l_c)^2/2$  to the radiation pressure  $a_0^2$  on the CEL. Obviously, maintaining the target integrity requires  $l_c$  to be smaller than the target thickness  $d_0$ . It is thus quite natural to introduce the normalized parameter  $\xi = Z n_{i0} d_0 / (\sqrt{2} a_0)$ . For  $\xi < 1$ , the radiation pressure is so strong that it cannot be balanced by the electrostatic pressure inside the target. All electrons are expelled from the target, which then undergoes Coulomb explosion. This regime of interaction has been studied in [20–22], where the authors have considered its applications to both electron and ion acceleration. It is however not suitable for efficient RPA of thin foils, which requires  $\xi \geq 1$ .

In what follows, we analyze two regimes of thin foil RPA for parameter values  $\xi \sim 1$  or  $\xi \gg 1$ .

#### 3.1. Phase-stable acceleration of thin targets

In the regime where  $\xi \sim 1$ , the radiation pressure is strong enough to push all electrons at the target rear side. A large electrostatic field is built up in the whole target and ions are continuously accelerated (see figure 1(a)) as they follow the compressed electron bunch. This regime that was first discussed by Yan *et al* [9] was named phase-stable acceleration by analogy with conventional radiofrequency linear accelerator techniques to keep particles in synchronization with the accelerating field. It is also referred to as self-organized double-layer acceleration [11] or coherent acceleration of ions by laser [19].

For the sake of simplicity, one assumes that the electron density in the CEL is constant and homogeneous:  $n_{ec} \sim Z n_{i0} d_0 / l_e$ , where  $l_e < d_0$  is the CEL thickness. At this point, we stress that simple considerations on the balance between electrostatic and radiation pressures do not allow us to derive this thickness  $l_e$ . For  $\xi = 1$ ,  $l_e$  would indeed shrink to 0, which is prevented by the electron pressure that is not included in our model.

As ions initially located outside the CEL are accelerated in an electrostatic field, which increases linearly in space, they are, *a priori*, not of interest for efficient generation of quasi-monoenergetic ion bunches. We should thus focus our attention on the ions located in the CEL, which undergo acceleration in the monotonically decreasing field:

$$E_x(t, x) = E_0(t) \frac{d(t) - x}{l_e}, \quad (6)$$

where  $d(t)$  is the position of the target rear side at time  $t$ , and the maximum electrostatic field  $E_0(t)$  can be derived from the equilibrium condition of the CEL (in the frame moving with the target rear side):

$$\frac{1}{2} (Z n_{i0} l_e) E_0(t) = a_0^2 \gamma_i^2 (1 - v_i^{(l)})^2, \quad (7)$$

where  $v_i^{(l)}$  is the velocity (in the laboratory frame) of the CEL, i.e. of ions accelerated in a phase-stable way, and  $\gamma_i = (1 - v_i^{(l)2})^{-1/2}$  is the associated Lorentz factor. From this, we obtain

$$E_0(t) = \sqrt{2} a_0 \gamma_i^2 (1 - v_i^{(l)})^2. \quad (8)$$

Note that in this regime, where electrons are piled up at the rear side of the target, the accelerating field  $E_0(t)$  does not depend on the CEL thickness  $l_e$ . A similar feature was discussed in [12].

The governing equation for the mean ion momentum can be easily derived by considering that, in the phase-stable regime, ions are accelerated, on the average, by an electrostatic field  $E_0(t)/2$ . We obtain

$$\frac{d}{dt} p_i^{(l)} = \frac{Z a_0}{\sqrt{2}} \gamma_i^2 (1 - v_i^{(l)})^2, \quad (9)$$

which is nothing but equation (2) derived in the macroscopic model for  $\xi \sim 1$ .

As for the ion motion around the mean velocity  $v_i^{(l)}$ , it can be described as in [9]. Denoting  $\chi_i(t)$  the position of an arbitrary ion in the CEL with respect to the center of the CEL and considering that all ions move with a velocity close to the mean velocity  $v_i^{(l)}$ , we obtain

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi_i = - \frac{Z E_0(t)}{m_i l_e \gamma_i^3} \chi_i. \quad (10)$$

Therefore, if both  $E_0(t)$  and  $\gamma_i$  vary slowly on a time scale  $\Omega^{-1}$ , where  $\Omega^2 = Z E_0(t) / (m_i l_e \gamma_i^3)$ , the ions in the CEL have a harmonic motion around the mean velocity. From this, one can infer the dispersion in ion velocities of the accelerated bunch  $\Delta v_i \sim l_e \Omega$  in the frame moving with the CEL. Correspondingly, the relative energy dispersion for non-relativistic ions scales as

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_i} \propto \left( \frac{Z l_e a_0}{\mathcal{E}_i} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

This scaling with  $\mathcal{E}_i^{-1/2}$  ensures, with the small CEL thickness  $l_e \ll 1$ , the quasi-monoenergetic feature of the accelerated ion beam. In the ultrarelativistic regime, one would obtain



$\Delta\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_i \propto \mathcal{E}_i^{-5/2}$ . However, and as will be shown in numerical simulations (section 4.2), the reduction of radiation pressure in the target frame associated with its relativistic recoil does not allow for this acceleration regime to be maintained at ultrarelativistic velocities. Instead, acceleration will more and more evolve like the multistage process discussed in section 3.2.

Phase-stable acceleration of the thin target thus opens an interesting path toward the creation of energetic quasi-monochromatic ion beams. Nevertheless, there is one restriction that was not mentioned in the original paper by Yan *et al* [9] that we want to address now. In this specific regime of laser–target interaction, the electron bunch is compressed at the target rear side. A large energy can thus be stored in the electrostatic field. Once the laser pulse is turned off, this energy is transferred back to the electrons, which start to quiver around the target, thus inducing its adiabatic expansion and in turn widening the ion energy spectrum.

To estimate the importance of this effect, we derive the energy stored in the electrostatic field (see also [12]). Neglecting the contribution of the CEL due to its small thickness and considering that the electrostatic field varies linearly,  $E_x(x) = E_0(t) x/d(t)$  for  $0 < x < d(t)$ , the energy stored in the electrostatic field reads

$$\mathcal{E}_{\text{es}}(t) \sim \int_0^{d(t)} \frac{E_x^2(x)}{2} dx = \frac{a_0^2}{3} \gamma_i^4 \left(1 - v_i^{(l)}\right)^4 d(t). \quad (12)$$

For non-relativistic ion velocities this quantity simplifies to  $\mathcal{E}_{\text{es}}(t) \sim n_{i0} d_0 \mathcal{E}_i(t)/3$ , suggesting that the energy stored in the electrostatic field is of the same order as the total ion kinetic energy. For such ion velocities, one should therefore expect a broadening of the ion energy distribution once the laser is turned off. For ultrarelativistic velocities however,  $\mathcal{E}_{\text{es}}$  is found to remain much smaller than the total kinetic ion energy, and the effect of adiabatic expansion on energy dispersion is negligible.

These theoretical predictions are compared to numerical simulations in section 4.2.

### 3.2. Multistage RPA of thicker targets

For  $\xi \gg 1$ , the radiation pressure can only push electrons at a distance  $l_c \ll d_0$  inside the target so that the resulting charge separation field remains confined to a region much thinner than the target itself (see figure 1(b)). As we will see, this field structure actually acts as a piston reflecting ions as it propagates deeper into the target. Ion acceleration in this regime can then be described as a multistage process [6, 7], where the target undergoes successive hole-boring (HB) processes.

For the sake of clarity, we first present the multistage process in the case of non-relativistic ion velocities. Then we generalize the procedure to the relativistic case.

**3.2.1. Non-relativistic ion velocities.** In a first stage, ion acceleration follows from the laser-driven HB of the immobile target. The laser acts on the target ions as a piston, moving deeper into the target with the velocity  $v_{p0}$  and reflecting an increasing number of ions [23, 24]. The piston velocity can be derived easily by considering the balance of radiation and electrostatic pressure in the frame comoving with the piston. If the laser field amplitude  $a_0$  and the target density  $n_{i0}$  are constant,  $v_{p0}$  will not change in time. For non-relativistic ion velocities, we obtain  $v_{p0} = a_0/\sqrt{2m_i n_{i0}}$ . During this stage, the ion velocity in the laboratory frame ranges between  $v_i^{(l)} = 0$  (corresponding to ions having not been picked up by the laser piston) and  $v_{i,1}^{(l)} = 2 v_{p0}$  (corresponding to ions that have been reflected once by the laser piston). Index 1 in the ion velocity denotes the first acceleration stage. This first stage lasts up to the time  $\tau_0 = d_0/v_{p0}$  when



the piston reaches the initial position of the back of the target. Ideally, at the end of this stage, all ions of the target have been accelerated to the velocity  $v_{i,1}^{(l)} = 2 v_{p0}$  in the laboratory frame and the whole target has been accelerated as a quasi-neutral bunch. At this point, we restrict ourselves to thin targets with thickness  $d_0 \ll v_{p0} t_p$  (with  $t_p$  being the laser pulse duration), a necessary condition for the multistage process of RPA. Targets with larger thickness will only undergo HB.

To describe the second acceleration stage, i.e. for times  $t > \tau_0$ , we consider that the whole target is moving with the velocity  $v_t^{(l)} = v_{i,1}^{(l)} = 2 v_{p0}$  in the laboratory frame. Then, in the frame moving with the target, ion acceleration proceeds in a way similar to laser-driven HB. During this stage, ion velocities range between 0 and  $2 v_{p0}$  in the target frame, which transforms to  $v_t^{(l)} = 2 v_{p0}$  and  $v_{i,2}^{(l)} = v_t^{(l)} + 2 v_{p0} = 4 v_{p0}$  in the laboratory frame.

Then, if  $t_p > 2 \tau_0$ , a third acceleration stage starts during which the ion velocity in the laboratory frame ranges between  $4 v_{p0}$  and  $6 v_{p0}$ . For a sufficiently long laser pulse, this multistage process goes on so that at the  $j$ th stage, the ion velocity ranges between  $v_{i,j-1}^{(l)} = 2(j-1) v_{p0}$  and  $v_{i,j}^{(l)} = 2j v_{p0}$ . Correspondingly, the ion energy ranges between  $2(j-1)^2 m_i v_{p0}^2$  and  $2j^2 m_i v_{p0}^2$ . Generation of quasi-monoenergetic ion bunches thus requires the acceleration process to occur over many steps, i.e. over a time  $t \gg \tau_0$ . If this condition is satisfied, the ion mean energy and energy dispersion at a time  $t \sim j \tau_0$  ( $j \gg 1$ ) read

$$\mathcal{E}_i(t) = 2 m_i v_{p0}^2 (t/\tau_0)^2, \quad (13)$$

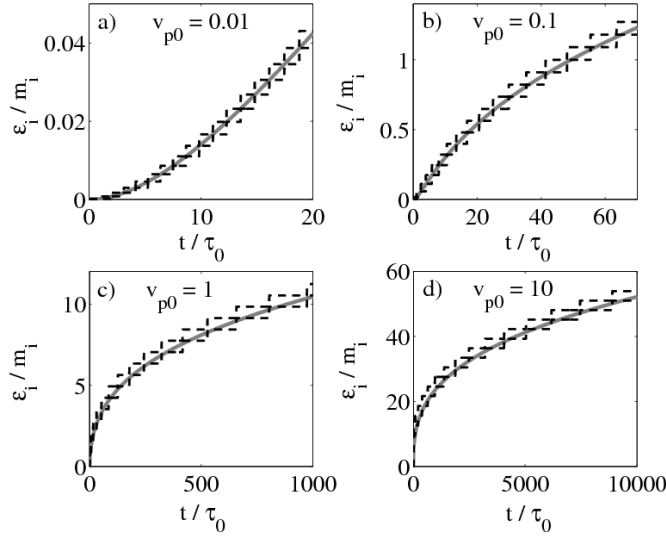
$$\Delta \mathcal{E}_i(t) = (2 \tau_0/t) \mathcal{E}_i(t). \quad (14)$$

The first equation corresponds to the ion energy evolution expressed by equation (4), which was obtained using the macroscopic model in section 2.1 in the limit of non-relativistic ion velocities. The second relation gives information about the energy dispersion of the ion bunch.

**3.2.2. Iterative procedure for relativistic ion velocities.** To extend the multistage model to higher ion velocities, relativistic effects such as the radiation pressure diminution on the target and dilation of the characteristic stage duration due to the target relativistic recoil have to be accounted for.

The initial stage of ion acceleration is once more similar to the laser-driven HB of the immobile target. Accounting for relativistic effects, the piston velocity is  $v_p = v_{p0}/(1 + v_{p0})$ . During this stage, ion velocities thus range between 0 (not yet reflected ions) and  $v_{i,1}^{(l)} = 2 v_p/(1 + v_p^2)$  (reflected ions). Correspondingly, we obtain the minimum and maximum ion energies during the first stage:  $\mathcal{E}_{i,1}^{\min} = 0$  and  $\mathcal{E}_{i,1}^{\max} = (\gamma_i - 1) m_i$ , where  $\gamma_i = (1 - v_i^{(l)2})^{-1/2}$ . This stage ends when the piston reaches the initial position of the target rear side, i.e. after a time  $\tau_s^{(l)} = d_0/v_p$ . In contrast to the classical limit, however, ions do not reach exactly twice the piston velocity. As a consequence, the target thickness and consequently the ion density have changed. At the end of this first acceleration stage, we have  $d_1 = v_{i,\max}^{(l)} \tau_s^{(l)} - d_0$  and  $n_{i,1} = n_{i0} d_0/d_1$ .

Let us now consider the  $j$ th stage of the acceleration process ( $j > 1$ ). The target velocity (in the laboratory frame) is the velocity that ions have reached at the former  $j-1$  stage:  $v_t^{(l)} = v_{i,j-1}^{(l)}$ . In the frame moving with the target, the laser radiation pressure is therefore reduced by the factor  $\gamma_t^2 (1 - v_t^{(l)2})^2$  (where  $\gamma_t = (1 - v_t^{(l)2})^{-1/2}$ ). The piston velocity in the target frame thus reads  $v_p^{(t)} = v_p'/(1 + v_p')$ , where  $v_p' = v_{p0} (n_{i0}/n_{i,j-1})^{-1/2} \gamma_t (1 - v_t^{(l)})$ . It follows that the reflected ions have a velocity  $v_i^{(t)} = 2 v_p^{(t)}/(1 + v_p^{(t)2})$  in the frame moving with the target,



**Figure 2.** Ion maximum and minimum energies predicted by the multistage model (dashed curves) and comparison to predictions from the macroscopic model (gray solid curves) for (a)  $v_{p0} = 0.01$ , (b)  $v_{p0} = 0.1$ , (c)  $v_{p0} = 1$  and (d)  $v_{p0} = 10$ .

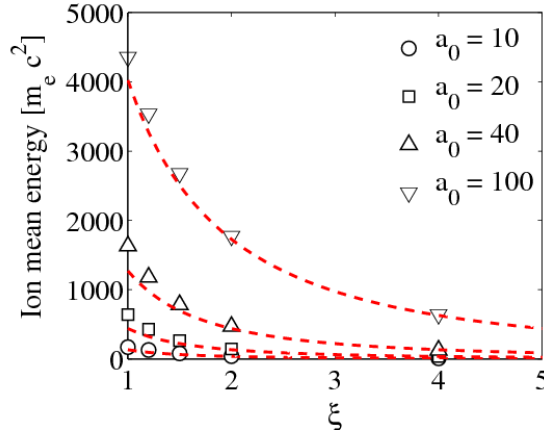
which transforms in  $v_{i,j}^{(l)} = (v_i^{(l)} + v_t^{(l)}) / (1 + v_i^{(l)} v_t^{(l)})$  in the laboratory frame. The duration of the stage in the target frame is easily computed as  $\tau_s^{(l)} = d_{j-1} / v_p^{(l)}$ , while one has to account for time dilation in the laboratory frame  $\tau_s^{(l)} = \gamma_t \tau_s^{(t)}$ . As for the target thickness and density at the end of the stage, they have to be recalculated in the target frame as  $d_j = v_i^{(t)} \tau_s^{(t)} - d_{j-1}$  and  $n_{i,j} = n_{i0} d_0 / d_j$ .

Following this procedure, we can compute the temporal evolution of the minimum and maximum ion energies for arbitrary values of the parameters  $v_{p0}$  and  $d_0$ . The comparison of this multistage model with the macroscopic model of section 2.1 is given in figure 2 for several values of  $v_{p0}$ . Predictions from the multistage model match perfectly with the results from section 2.1 for  $v_{p0} = 0.01$ , where the characteristic ion energy evolution  $\propto (t/\tau_0)^2$  is recovered (figure 2(a)). For higher values of  $v_{p0}$  (figures 2(b)–(d)), good agreement is still found between the two models. A small discrepancy can, however, be observed in the ion mean energy<sup>8</sup>, but it remains small compared to the predicted energy dispersion. It must also be noted that the characteristic duration of an acceleration stage, for relativistic ion velocities, can be strongly dilated in the laboratory frame, which has an important effect on energy dispersion. These analytical predictions are compared to numerical simulations in section 4.3.

#### 4. Numerical simulations

Numerical simulations of RPA of thin targets have been performed using the PIC code PICLS [27]. In order to make a direct comparison with our analytical model, only 1D in space

<sup>8</sup> Our multistage model predicts a slightly higher ion energy than the macroscopic model. This is because, in our multistage model, we have a step-like decrease of the radiation pressure onto the target, while radiation pressure is continuously decreasing in the macroscopic model.



**Figure 3.** Dependence of the ion mean energy on the normalized parameter  $\xi$  (proportional to the target thickness)  $\simeq 10 \tau_L$  after the beginning of the interaction. The carbon target has density  $Z n_{i0} = 150$  and the laser field amplitude is  $a_0 = 10$  ( $\circ$ ),  $a_0 = 20$  ( $\square$ ) and  $a_0 = 40$  ( $\triangle$ ). Red dashed lines correspond to predictions from the macroscopic (light-sail) model (solutions of equation (2)).

and 3D in velocity (1D3V) simulations are presented. This choice is also justified, as it has been shown that a quasi-1D geometry is required to avoid strong electron heating and partial transparency of the foil, which may prevent quasi-monoenergetic ion beam generation [7]. Our study thus provides us with necessary, albeit not sufficient, conditions for creating monoenergetic ion beams.

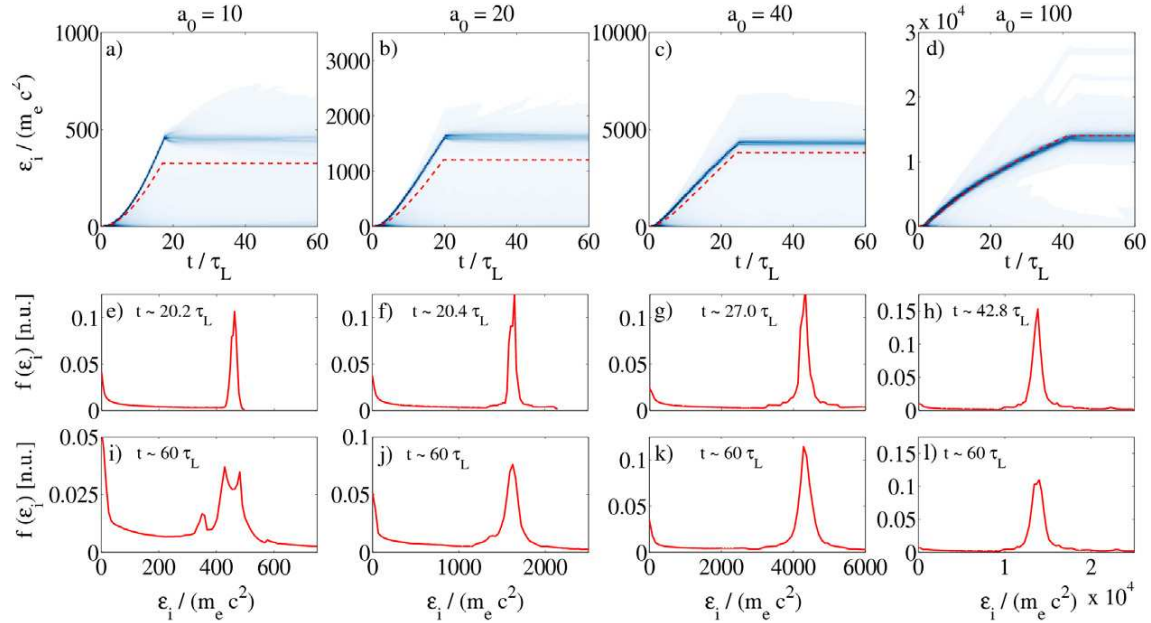
In our simulations, a CP laser pulse is focused at normal incidence on a thin, fully ionized, carbon target with density  $n_{i0} = 25$  and  $Z = 6$ . The target is located at a distance  $2 \lambda_L$  from the left boundary of the simulation box (the laser propagates from left to right). Both the incident laser field amplitude and the target thickness are varied to explore different regimes of RPA of thin foils.

#### 4.1. Optimal target thickness

Figure 3 shows the ion mean energy at an instant  $t \simeq 10 \tau_L$  after the beginning of the interaction for  $\xi \geq 1$ . In the case  $\xi < 1$ , the simulations indeed confirm that all electrons are removed from the target due to the strong radiation pressure, leading to the Coulomb explosion of the non-neutralized ion layer. For  $\xi \geq 1$ , one observes that the ion mean energy increases as the target thickness decreases: the lighter the target, the higher ion energy one can reach. Such a result was already discussed in [10, 12] with the conclusion that the regime,  $\xi \sim 1$ , is the optimum case for high-energy ion generation.

#### 4.2. Ion acceleration in the phase-stable regime

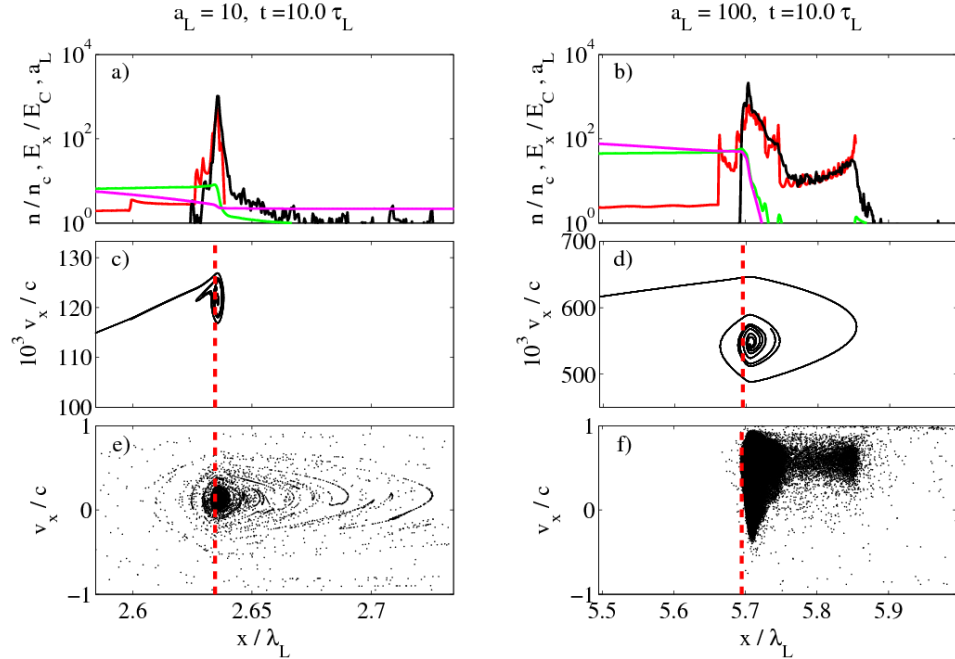
Let us have a more detailed look at ion acceleration in the phase-stable regime  $\xi \sim 1$ . Figure 4 presents the time-resolved energy spectra obtained in simulations for different



**Figure 4.** Phase-stable acceleration ( $\xi = 1$ ). (a–d) Time-resolved ion energy spectra. (e–h) Snapshot of the energy spectrum at the end of the laser–target interaction. (i–l) Snapshot of the energy spectrum at the end of the simulation. The laser field amplitude is (a, e, i)  $a_0 = 10$ , (b, f, j)  $a_0 = 20$ , (c, g, k)  $a_0 = 40$  and (d, h, l)  $a_0 = 100$ . Red dashed lines show theoretical predictions from the macroscopic model.

incident laser field amplitudes  $a_0 = 10$ – $100$  and  $\xi \sim 1$  (the target thickness is adjusted for each laser amplitude). Theoretical predictions for the ion mean energy from the macroscopic model (section 2.1) are superimposed on to the numerical results. Rather good agreement is found between theory and simulation. However, while for  $a_0 = 100$  the ion mean energy evolves exactly as predicted by the macroscopic model, numerical simulations at lower field amplitudes ( $a_0 = 10$ – $20$ ) show higher ion energies than estimated analytically. The reason for this discrepancy can be found in figure 5 and the corresponding movies, where details of the temporal evolution of the target structure during the acceleration process are presented for  $a_0 = 10$  and  $a_0 = 100$ . For the lower laser field amplitude,  $a_0 = 10$ , the CEL is not totally opaque to the laser field, which is partly transmitted (the foil transmittance is here  $T \simeq 20\%$ ). The ponderomotive force on the target rear side is thus non-zero and some electrons can escape from the target into the vacuum behind. This widens the electrostatic field distribution and increases its average value at the target rear side, thus leading to the observed increase of ion energy. In contrast, for  $a_0 = 100$ , the target is partly transparent only during a short time at the beginning of the interaction. Once the target has reached a relativistic velocity, the radiation pressure in the target frame is lower and electrons remain confined in the target. On such long times, the CEL does not actually stay at the target rear side and ion acceleration becomes more similar to multistage acceleration.

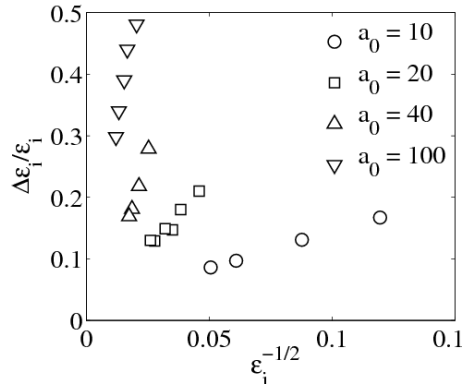
Figure 4 also reveals the quasi-monoenergetic ion distribution during the acceleration process. This is underlined in the different panels of figure 4 presenting the ion energy at the end



**Figure 5.** Phase-stable acceleration ( $\xi = 1$ ). Details of the target  $10 \tau_L$  after the beginning of the interaction for (a, c, e)  $a_0 = 10$  and (b, d, f)  $a_0 = 100$ . (a, b) The laser field amplitude is shown in magenta, the electrostatic field in green and the ion and electron densities in red and black, respectively. (c, d) Ion distribution in phase space. (e, f) Electron distribution in phase space. See also movies of the whole simulation corresponding to (a, c, e) and (b, d, f), available from [stacks.iop.org/NJP/13/123003/mmedia](http://stacks.iop.org/NJP/13/123003/mmedia) (movies 1 and 2).

of the interaction process (panels 4(e)–(h)), as well as in figure 6, which shows the relative ion energy dispersion as a function of the ion mean energy for  $a_0 = 10$ –100. Figure 6 also confirms the characteristic dependence of the relative energy dispersion, which is proportional to  $\mathcal{E}_i^{-1/2}$  as predicted by equation (11). Equation (11) also predicts that  $\Delta\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_i$  should scale as  $\sqrt{l_e a_0}$ , and one could naively expect for a given ion mean energy that  $\Delta\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_i$  scales as the square root of the laser field amplitude  $a_0$ . Figure 6, however, shows that the dependence on  $a_0$  is stronger. This is because the CEL thickness  $l_e$  actually increases with  $a_0$  for a fixed value of  $\xi \propto d_0/a_0$ .

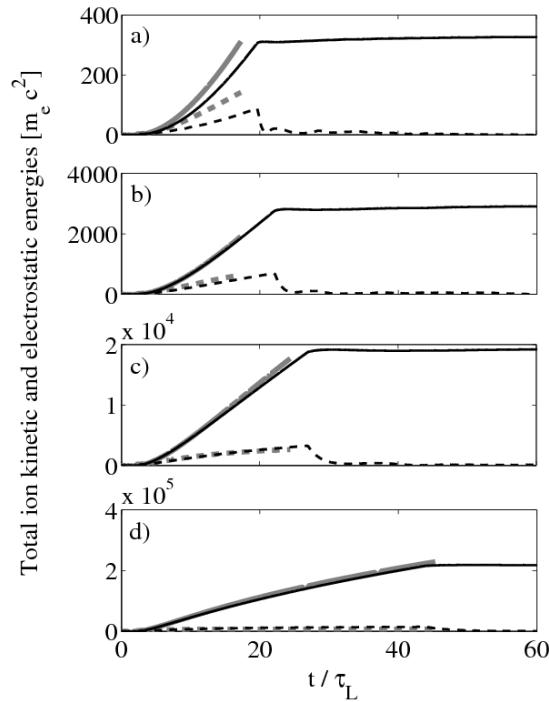
Let us now discuss the fraction  $f_i$  of ions in the monoenergetic peak. A naive estimate can be derived from the semi-microscopic model presented in section 3.1 by considering that only ions initially located in the CEL participate in the phase-stable acceleration so that  $f_i \sim 1 - \xi^{-1}$  (see also [26]). This estimate would suggest that only a very small fraction of the target ions participate in the acceleration process. Simulations, however, show quite the contrary:  $f_i$  ranges between 0.45 and 0.67 for  $a_0 = 10$ –100. There are two reasons for such a high number of accelerated ions. (i) While in the model presented in section 3.1 the CEL thickness shrinks to 0 as  $\xi \rightarrow 1$ , the electron pressure in the CEL actually increases during the compression by the laser pulse and prevents its collapse. As a result, the CEL thickness is much larger than expected in the model and so is the fraction of accelerated ions. (ii) Furthermore, some ions initially located outside of the CEL can still be injected (after



**Figure 6.** Phase-stable acceleration ( $\xi = 1$ ). Relative energy dispersion during the phase-stable acceleration as a function of the ion mean energy. For  $a_0 = 10$  ( $\circ$ ),  $a_0 = 20$  ( $\square$ ),  $a_0 = 40$  ( $\triangle$ ) and  $a_0 = 100$  ( $\nabla$ ).

some time) in the CEL and thereafter participate in the phase-stable acceleration. While the creation of the CEL is almost instantaneous (because of electron relativistic velocities, it occurs on a characteristic time  $\sim d_0/c \ll 1$ ), ions react to the strong electrostatic field on a longer time scale of the order of the inverse ion plasma frequency. A self-maintained structure made of both the CEL and ions is formed and it is this structure which is accelerated in a phase-stable way. The correct modeling of this accelerating structure is very challenging as it would require one to describe self-consistently the ion and electron motions. While this has been done for ion acceleration in the HB regime in [24] by developing a quasi-stationary model, this is particularly difficult under current conditions as the quasi-stationary hypothesis does not hold. What is also clearly highlighted in the two movies is that some ions, which are not initially located inside the accelerating structure, can be injected into it after some time. Ions located outside the CEL indeed ‘see’ a constant accelerating field and may actually catch up with the CEL after some time. For nonrelativistic ions, one can easily estimate that only ions initially located at a position  $x_{i0} > d_0/2$  can reach the CEL and their fraction  $f_i$  cannot exceed 50%. Accounting for relativistic effects allows for a larger fraction of reinjected ions (which increases in time, according to simulations, up to 67% for  $a_0 = 100$ ). Similar features have been reported by Eliasson *et al* [25] using the Vlasov–Maxwell simulations. Considering a thin foil with dimensionless parameter  $\xi \sim 1.8$  ( $Z n_{i0} = 10$ ,  $d_0 = 0.2 \lambda_L$  and  $a_0 = 5$ ), the authors found that between 75 and 80% of the ions are efficiently accelerated and that relativistic effects help in increasing this fraction.

Finally, we want to point out that, once the laser is turned off, the energy stored in the electrostatic field goes back to electrons, which start quivering around the accelerated ions, thus driving its adiabatic expansion. If the electrostatic energy is of the same order of magnitude as the total ion energy, this can strongly enhance the final ion energy dispersion. To investigate this effect in depth, we have plotted the total energy of ions in the monoenergetic peak and the energy stored in the electrostatic field as a function of time for  $a_0 = 10$ –100 in figure 7. For small laser amplitudes  $a_0 = 10$ –20 and correspondingly non-relativistic ion energies, a non-negligible fraction of the energy ( $\simeq 30\%$ ) is stored in the electrostatic field. As a consequence, the corresponding ion energy spectra (figures 4(i) and (j)) are considerably wider at the end of



**Figure 7.** Phase-stable acceleration ( $\xi = 1$ ). Temporal evolution of the total kinetic energy of ions in the monoenergetic peak (solid curves) and the energy stored in the electrostatic field (dashed curves) for (a)  $a_0 = 10$ , (b)  $a_0 = 20$ , (c)  $a_0 = 40$  and (d)  $a_0 = 100$ . Gray lines show theoretical predictions from section 3.1.

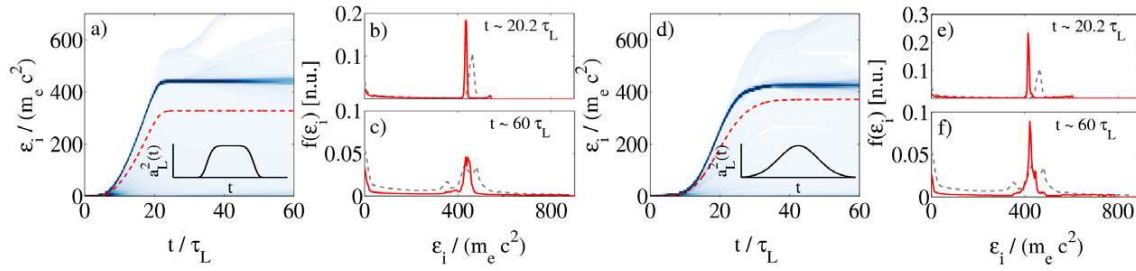
the simulation. In contrast and as predicted in section 3.1, this effect is negligible for sufficiently large ion energies. For  $a_0 = 40$ – $100$ , most of the energy is stored in the accelerated ion bunch and non-enhanced ion energy dispersion is observed (figures 4(k) and (l)).

In addition, we note that this effect can also be mitigated at low ion energy by using a more sophisticated laser pulse temporal profile, e.g. by considering Gaussian or hyper-Gaussian pulses. Figure 8 shows the ion energy spectra obtained using a sixth-order hyper-Gaussian or Gaussian laser pulse with similar maximum field amplitude  $a_0 = 10$ , fluence and full-width at half-maximum. The enhanced energy dispersion due to the long-time behavior of electrons is strongly mitigated as the pulse is slowly turned off.

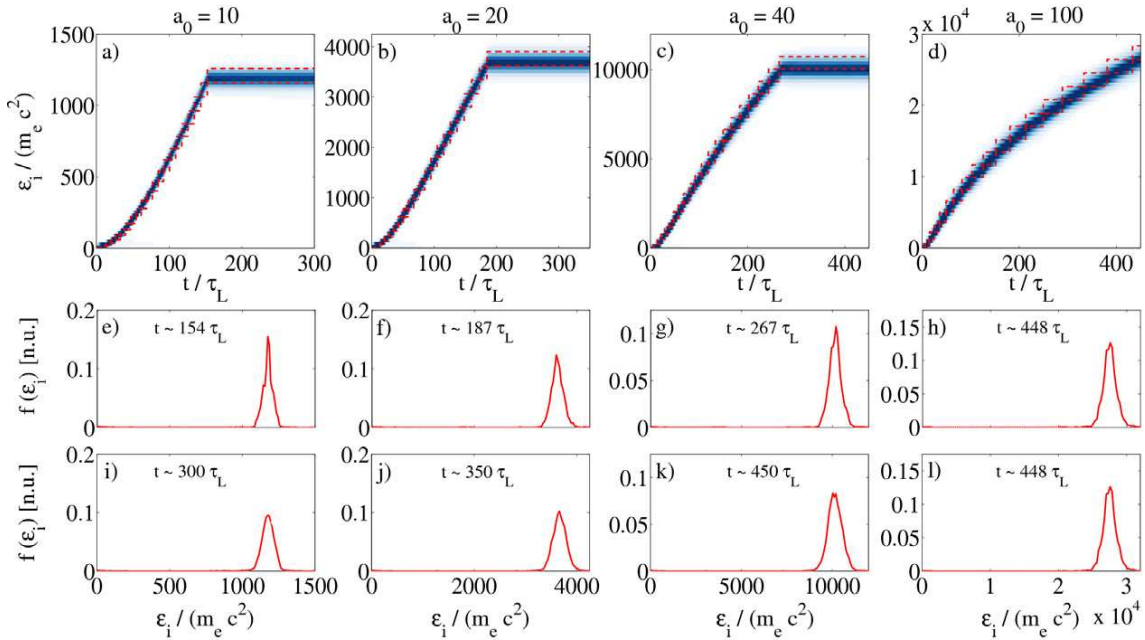
#### 4.3. Ion acceleration in the multistage regime

PIC simulations in the regime of multistage acceleration ( $\xi \gg 1$ ) are now discussed. Figure 9 shows the time resolved ion energy spectra extracted from simulations with  $\xi = 4$  and different laser field amplitudes ( $a_0 = 10$ – $100$ ). In these simulations, the laser temporal envelope  $a_L(t)$  is constant over a duration corresponding to  $20 t_0$  (we recall that  $t_0 = d_0/v_{p0}$  is the characteristic duration of an acceleration stage). Theoretical predictions from the model developed in section 3.2 are superimposed on the numerical results. Rather good agreement on the minimum and maximum ion energies as a function of time is found between theory and simulations: our





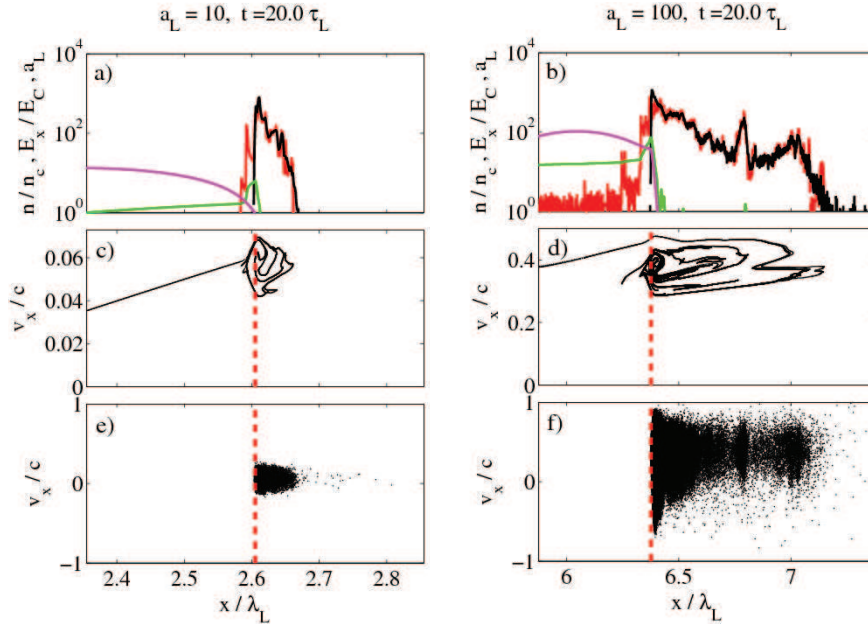
**Figure 8.** Phase-stable acceleration ( $\xi = 1$ ). The same as figure 4 for  $a_0 = 10$  and two different laser intensity profiles: (a–c) for a sixth-order hyper-Gaussian profile and (d–f) for a Gaussian profile. Red dashed lines in panels (a) and (d) show theoretical predictions from the light-sail model (solutions of equation (2)). Gray dashed lines in panels (b, c, e, f) show the energy spectra obtained using a rectangular laser temporal envelope  $a_L(t)$  as shown in figure 4 (e, i).



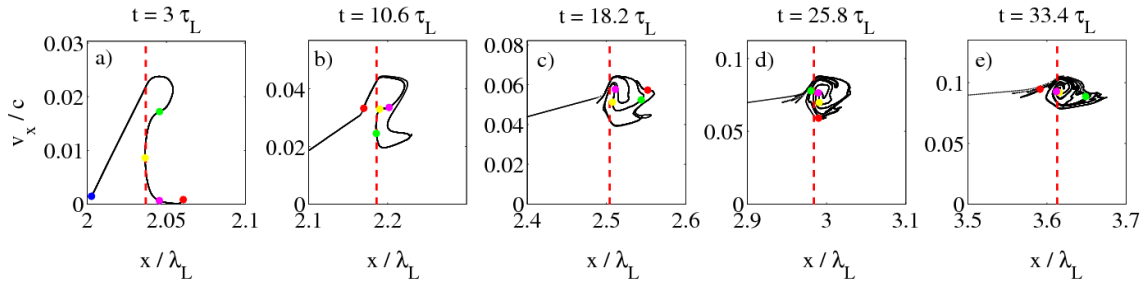
**Figure 9.** Multistage acceleration ( $\xi = 4$ ). (a–d) Time-resolved ion energy spectra. (e–h) Snapshot of the energy spectrum at the end of the laser-target interaction. (i–l) Snapshot of the energy spectrum at the end of the simulation. The laser field amplitude is (a, e, i)  $a_0 = 10$ , (b, f, j)  $a_0 = 20$ , (c, g, k)  $a_0 = 40$  and (d, h, l)  $a_0 = 100$ . Red dashed lines in panels (a–d) show theoretical predictions from the iterative model (section 3.2).

model allows us to correctly predict both the ion mean energy and energy dispersion. For the cases with  $a_0 = 40$  and  $a_0 = 100$ , ions quickly reach relativistic energies and the dilation in the laboratory frame of the characteristic stage duration becomes obvious. Also, the duration of the laser–target interaction (and therefore of the acceleration process) increases as the foil reaches larger velocities (figure 9).





**Figure 10.** Multistage regime ( $\xi = 4$ ). Details of the target  $20 \tau_L$  after the beginning of the interaction for (a, c, e)  $a_0 = 10$  and (b, d, f)  $a_0 = 100$ . (a, b) The laser field amplitude is shown in magenta, the electrostatic field in green and the ion and electron densities in red and black, respectively. (c, d) Ion distribution in phase space. (e, f) Electron distribution in phase space. See also movies of the whole simulation corresponding to (a, c, e) and (b, d, f), available from [stacks.iop.org/NJP/13/123003/mmedia](http://stacks.iop.org/NJP/13/123003/mmedia) (movies 3 and 4).



**Figure 11.** Multistage regime ( $\xi = 4$ ). Ion phase space at different times after the beginning of interaction: (a)  $3 \tau_L$ , (b)  $10.6 \tau_L$ , (c)  $18.2 \tau_L$ , (d)  $25.8 \tau_L$  and (e)  $33.4 \tau_L$ . Each time corresponds to a different acceleration stage. In this simulation,  $a_0 = 10$  and  $\xi = 4.0$ . The colored dots follow test ions during the acceleration process. The vertical dashed line shows the position of the laser piston (position of the maximum electrostatic field).

Additional details of the target structure as well as the ion and electron phase-space distributions during the acceleration process are given in figures 10 and 11 and in the corresponding movies. The transition between successive acceleration stages is clearly visible in the movies. For the case  $a_0 = 10$  for instance, the first HB stage terminates at  $t \simeq 16 \tau_L$ . As ions

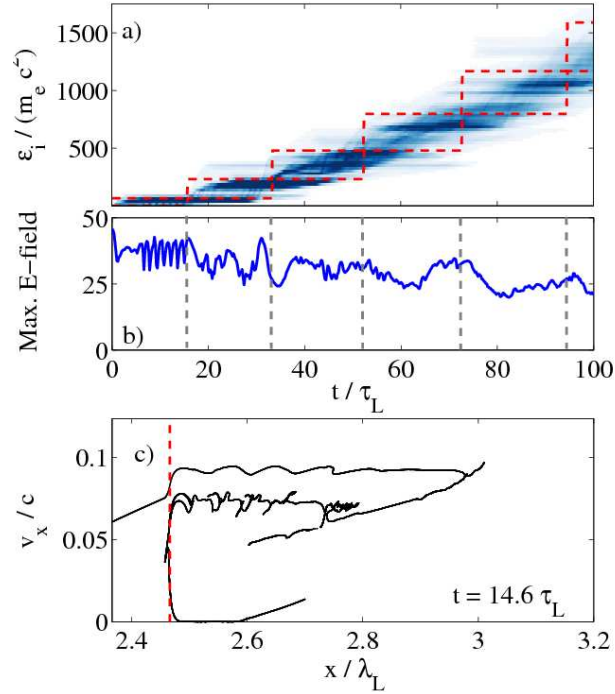
are reflected again and again by the laser piston, their distribution in phase space becomes more and more complex in contrast to what was observed during phase-stable acceleration (compare, for instance, figures 10(c) and (d) and figures 5(c) and (d)).

Furthermore, the ion energy spectra at the end of the simulations (figures 9(i)–(l)) are quite similar to those obtained at the end of the laser–target interaction (figures 9(e)–(h)). In contrast to phase-stable acceleration, the ion energy distribution here is not sensitive to the late-time behavior of the electrons. This is due to the small fraction of laser energy which is stored in the electrostatic field at  $\xi \gg 1$ .

This excellent control of the ion beam spectrum as well as the large fraction of accelerated ions ( $f_i$  exceeds 90% in these simulations) makes this regime of acceleration particularly attractive for high-quality ion beam generation. Similarly, in [25], the authors report a fraction  $f_i \sim 95\%$  of accelerated ions for a foil with a dimensionless parameter  $\xi \sim 3.6$  ( $Z n_{i0} = 10$ ,  $d_0 = 0.4 \lambda_L$  and  $a_0 = 5$ ). Numerical simulations also suggest that RPA proceeds in the multistage regime as soon as  $\xi \gtrsim 2$ , which makes this robust mechanism more likely to be observed in experiments than phase-stable acceleration.

Finally, as RPA in the multistage regime follows from successive HB of the target, one may suggest an additional source of energy dispersion for large laser field amplitudes and/or rather thick targets. Recent studies have indeed underlined the non-stationary behavior of the laser piston at high laser intensities giving rise to the so-called piston oscillations [24]. This phenomenon implies large-amplitude (typically  $\simeq 30\%$ ) oscillations of the maximum electrostatic field in the laser piston, leading to an enhanced energy dispersion of ions reflected during the HB process. While the origin of these oscillations is not yet fully understood, some of their characteristic features are known: (i) their characteristic period is of the order of the inverse ion plasma frequency ( $\omega_{pi} = \sqrt{Z^2 n_{i0}/m_i}$  in our normalized units), (ii) they appear after a characteristic time  $t_s$ , which is shorter for larger laser field amplitudes and/or target densities. For instance, PIC simulations of HB of a thick carbon foil with ion density  $n_{i0} = 25$  by a CP laser pulse with  $a_0 = 40$  indicate that oscillations in the electrostatic field with a characteristic period  $\simeq 1.4 \tau_L$  and  $\simeq 35\%$  amplitude with respect to the maximum field strength occur after a time  $t_s \simeq 5 \tau_L$ . Increasing the laser field amplitude to  $a_0 = 100$  does not change the relative amplitude of the oscillations or their period but shortens the characteristic time of their appearance to  $t_s \simeq 3.7 \tau_L$ .

One could therefore fear that these piston oscillations widen the energy spectrum during the multistage acceleration. Clearly, this is not the case in the simulations presented in figure 9, where the energy dispersion is well described by our multistage model (which does not account for the piston oscillations). However, for these simulations, the characteristic duration of an acceleration stage  $t_0 \sim d_0/v_{p0} \simeq 6 \tau_L$  is rather short and the piston oscillations have scarcely the time to develop. Therefore, we have performed a simulation with a thicker target ( $\xi = 10$  and  $a_0 = 40$ ). The results of this simulation are presented in figure 12. During the first acceleration stage, for  $t = 0$ – $16 \tau_L$ , oscillations in the maximum electrostatic field are clearly visible after a time  $t \simeq 5 \tau_L$  (figure 12(b)) and result in a rather complex ion phase-space distribution (figure 12(c) as compared to figure 11(a)). Nevertheless, these regular oscillations disappear at the end of the first stage ( $t > 16 \tau_L$ ), which we attribute to the already perturbed target configuration in the second acceleration stage. There are still some large variations in the maximum value of the electrostatic field, but these variations are generic to all realistic simulations we have performed in the multistage regime. They follow more from the global ion dynamics in the target than from the piston oscillations themselves. Hence, these results suggest



**Figure 12.** Multistage regime ( $\xi = 4$ ). (a) Time-resolved ion energy spectra. The dashed lines show theoretical prediction from the multistage model. (b) Temporal evolution of the maximum electrostatic field. Vertical gray lines indicate the end of the different acceleration stages as predicted from the multistage model. (c) Ion phase space  $14.6\tau_L$  after the beginning of the interaction. The vertical red line shows the position of the laser piston (where the electrostatic field is maximum).

that the so-called piston oscillations are not a concern for the control of ion energy distributions during RPA in thin foils.

## 5. Conclusion

A detailed study of ion energy dispersion in RPA ion beams is presented using both analytical modeling and 1D3V PIC simulations. The description proposed here allows for a greater insight into the details of RPA of thin foils than the standard macroscopic light-sail model. In particular, our description provides us with necessary conditions for quasi-monoenergetic ion beam generation.

Two RPA regimes are identified depending on the dimensionless parameter  $\xi$  which determines, for a given target density and laser field amplitude, the target thickness. For both regimes, the models we have developed allow us to recover the ion energy temporal evolution obtained by considering efficient momentum transfer from the laser photons to the target ions (the usual light-sail model). By accounting for the target structure during the acceleration process, we can even retrieve the ion energy dispersion.

For  $\xi \sim 1$  (thin targets), the strong radiation pressure pushes all electrons to the target rear side. A large electrostatic field is built up in the whole target and ions are continuously accelerated. RPA then proceeds in the phase-stable regime introduced in [9]. Two sources of energy dispersion have been identified in this regime: the electric field inhomogeneity in the accelerating structure, and the adiabatic foil expansion due to the late-time electron behavior. This later process is important mainly for low-energy ions and its effect can be mitigated by using smooth temporal laser profiles. We also recall that predicting more accurately the energy dispersion in this regime would require us to compute the thickness of the CEL, which cannot be done using the present model.

For  $\xi \gtrsim 2$  (thicker targets), the radiation pressure is not strong enough to push electrons to the target rear side. Instead, the electrostatic field is confined to a very thin region (compared to the target thickness). It forms the so-called laser piston. Ion acceleration is not continuous anymore and it proceeds in a multistage regime as originally discussed in [6, 7] and for which we have developed a simple but sound model. Ion energy dispersion in this regime is mainly determined by the number of acceleration stages. Small-energy dispersion can thus be achieved by using long enough laser pulses.

Furthermore, it is worth underlining that, in simulations, the two acceleration regimes can be distinguished when considering the ion distribution in phase space  $(x, v_x)$ . Indeed, while the ion phase space has a rather simple, spiral-like shape in the phase-stable acceleration, it is much more complex in the multistage regime due to the successive HB processes.

Finally, this work suggests that using moderately intense (and long) laser pulses is preferable for monoenergetic ion beam generation. The lower limit on the laser intensity actually follows from the need to accelerate the ions to the desired energy before the target escapes from the laser focal volume. As for the optimal target thickness, the thinner the target, the higher the ion energies one can reach. However, maintaining the target integrity in the regime  $\xi \rightarrow 1$  might be experimentally difficult. Any non-uniformity in the laser intensity profile may lead to the removal of electrons and the resulting Coulomb explosion of the target. Also, Rayleigh–Taylor-like instabilities, which have been observed in 2D simulations [7], may be more detrimental for very thin targets. Since simulations suggest that RPA occurs in the multistage regime as soon as  $\xi \gtrsim 2$ , phase-stable acceleration may thus be difficult to achieve in experiments. We therefore expect multistage acceleration to be the practically relevant acceleration mechanism.

## Acknowledgments

We are grateful to E d’Humières and Y Sentoku for providing us with the PICLS code.

## References

- [1] Wilks S C, Langdon A B, Cowan T E, Roth M, Singh M, Hatchett S, Key M H, Pennington D, MacKinnon A and Snavely R A 2001 *Phys. Plasmas* **8** 542
- [2] Mora P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 185002
- [3] Marx G 1966 *Nature* **211** 22
- [4] Esirkepov T, Borghesi M, Bulanov S V, Mourou G and Tajima T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 175003
- [5] Macchi A, Cattani F, Liseykina T V and Cornolti F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 165003
- [6] Zhang X, Shen B, Li X, Jin Z and Wang F 2007 *Phys. Plasmas* **14** 073101
- [7] Klimo O, Psikal J, Limpouch J and Tikhonchuk V T 2008 *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **11** 031301

- [8] Robinson A P L, Zepf M, Kar S, Evans R G and Bellei C 2008 *New J. Phys.* **10** 013021
- [9] Yan X Q, Lin C, Sheng Z M, Guo Z Y, Liu B C, Lu Y R, Fang J X and Chen J E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 135003
- [10] Rykovanov S G, Schreiber J, Meyer-ter-Vehn J, Bellei C, Henig A, Wu H C and Geissler M 2008 *New J. Phys.* **10** 113005
- [11] Tripathi V K, Liu C S, Shao X, Eliasson B and Sagdeev R Z 2009 *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 024014
- [12] Macchi A, Veghini S and Pegoraro F 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 085003
- [13] Qiao B, Zepf M, Borghesi M and Geissler M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 145002
- [14] Pegoraro F and Bulanov S V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 065002
- [15] Bulanov S V, Echkin E Yu, Esirkepov T Zh, Inovenkov I N, Kando M, Pegoraro F and Korn G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 135003
- [16] Chen M, Pukhov A, Yu T P and Sheng Z M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 024801
- [17] Henig A *et al* 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 245003
- [18] Liechtenstein V Kh, Ivkhova T M, Olshanski E D, Repnow R, Steier P, Kutschera W, Wallner A and Von Hahn A 2006 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **561** 120
- [19] Tajima T, Habs D and Yan X Q 2009 *Rev. Accel. Sci. Tech.* **2** 201
- [20] Kulagin V V, Cherepenin V A, Hur M S and Suk H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 124801
- [21] Grech M, Skupin S, Nuter R, Gremillet L and Lefebvre E 2009 *New J. Phys.* **11** 093035
- [22] Grech M, Skupin S, Nuter R, Gremillet L and Lefebvre E 2010 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **620** 63
- [23] Naumova N, Schlegel T, Tikhonchuk V T, Labaune C, Sokolov I V and Mourou G 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 025002
- [24] Schlegel T, Naumova N, Tikhonchuk V T, Labaune C, Sokolov I V and Mourou G 2009 *Phys. Plasmas* **16** 083103
- [25] Eliasson B, Chuan S L, Shao X, Sagdeev R Z and Shukla P K 2009 *New J. Phys.* **11** 073006
- [26] Macchi A, Veghini S, Liseykina T V and Pegoraro F 2010 *New J. Phys.* **12** 045013
- [27] Sentoku Y and Kemp A 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 6846

# Amplification of transition-Cherenkov terahertz radiation of femtosecond filament in air

Yi Liu,<sup>1,a)</sup> Aurélien Houard,<sup>1</sup> Bernard Prade,<sup>1</sup> André Mysyrowicz,<sup>1,b)</sup> Abdourahmane Diaw,<sup>2</sup> and Vladimir T. Tikhonchuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Optique Appliquée, ENSTA, Ecole Polytechnique, CNRS UMR 7639, Palaiseau 91761, France

<sup>2</sup>Centre Lasers Intenses et Applications, Université Bordeaux I, CEA, CNRS UMR 5107, Talence 33405, France

(Received 16 May 2008; accepted 10 July 2008; published online 5 August 2008)

The transition-Cherenkov terahertz radiation from a femtosecond laser filament in air is enhanced by three orders of magnitude in the presence of a longitudinal static electric field, while the radiation pattern and the polarization remain the same. An amplified longitudinal electron current inside the filament is responsible for this amplified terahertz emission. © 2008 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.2965612]

A plasma filament formed in air by a femtosecond laser pulse is a promising source for electromagnetic radiation in the terahertz domain<sup>1–6</sup> due to the simplicity of alignment, availability of the effective medium, and also due to the ability to position the terahertz emitter in the proximity of a remote sample far away from the laser system.<sup>5,6</sup> The femtosecond laser filament arises from the dynamic competition between Kerr beam self-focusing and beam defocusing by the produced air ionization. The filament characteristics such as length and position can be easily controlled by manipulating the laser pulse or the focusing conditions.<sup>7</sup> The forward terahertz radiation from a single filament was found to be radially polarized and exhibits a hollow-cone structure where the radiation intensity on the laser propagation axis is zero and the cone opening angle depends on the filament length.<sup>5,6</sup> As to the mechanism for this terahertz wave, the authors proposed a transition-Cherenkov model where the electrostatic wake behind the ionization front inside the filament gives out electromagnetic emission in the terahertz domain. However, the conversion efficiency of the mechanism is relatively low, on the order of  $10^{-9}$ , because of the relatively weak electric field in the wake of the ionization front.<sup>8</sup> Recently, it was demonstrated that by applying a transverse electric field (with respect to the filament axis), it is possible to enhance the terahertz emission intensity by at least three orders of magnitude.<sup>9</sup>

In this paper, we follow this idea and demonstrate that the intensity of the terahertz emission from laser filament is enhanced by three orders of magnitude if one applies a static electric field along the filament axis. In contrast to the case with a transverse field, the angular radiation pattern and the polarization characteristics of the terahertz wave remain the same as those without the external electric field. We extend the transition-Cherenkov model by taking into account the electron current in filament driven by the external voltage. This model reproduces all the observed features of this amplified terahertz emission.

A commercial femtosecond laser system (Thales, Alpha-100) is used in this experiment. It delivers laser pulse of 50 fs and 15 mJ at a repetition rate of 100 Hz. The IR pulses are focused by a convex lens of 1 or 1.5 m in the ambient air, and a plasma filament is formed. Two square copper electrodes with circular holes of different sizes on the center are mounted across the filament (Fig. 1). The diameters of holes in the first and second electrodes are 3 and 20 mm, respectively. A larger size of the second hole assures that the filament is not disturbed by electrodes and that the terahertz radiation produced by the filament propagates freely outside of the electrodes cavity. A heterodyne terahertz detector sensitive to the 0.1 THz component of the terahertz emission is used for the characterization of the terahertz signal.<sup>5,6</sup>

In the first series of measurements, a pulse of 2.3 mJ is used and the distance between the two electrodes  $D$  is set to 15 mm. The radiation pattern of the terahertz emission from the biased filament is measured as a function of electric field strength, and the results are shown in Fig. 2(a). Note that the terahertz signal intensity without external field is multiplied by a factor 200 for visibility. Two conclusions are evident. First, the terahertz intensity in the presence of electric field  $E=10$  kV/cm is enhanced by about 1000 times. Second, the enhanced terahertz radiation exhibits the same radiation pattern as that without the external field. The enhanced terahertz emission is found to be radially polarized as in the case of a pure transition-Cherenkov radiation (data not shown).<sup>5,6</sup>

The similarity of the radiation pattern and polarization properties of this enhanced terahertz emission with the case without the external electric field indicates that it has the

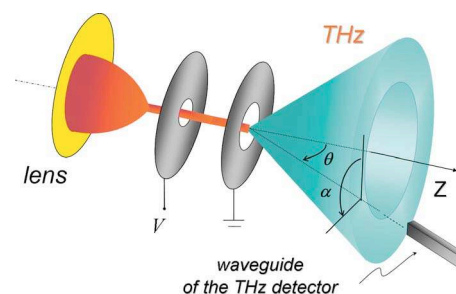


FIG. 1. (Color online) Schematic setup of the experiment.

<sup>a)</sup>Electronic mail: yi.liu@ensta.fr.

<sup>b)</sup>Author to whom correspondence should be addressed. Electronic mail: andre.mysyrowicz@ensta.fr.



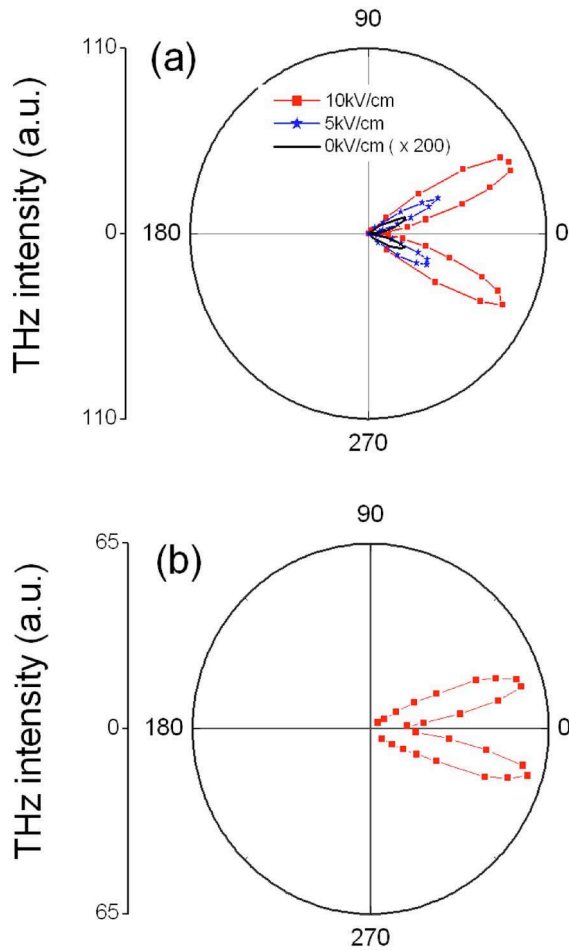


FIG. 2. (Color online) Radiation pattern of the amplified transition-Cherenkov terahertz emission: (a)  $D=15$  mm; (b)  $D=60$  mm. The transition-Cherenkov emission without the external electric field is multiplied by a factor of 200 for visibility. Note that (a) and (b) are not in the same scale.

same physical origin. In the case of a pure transition-Cherenkov emission, the ponderomotive force of the laser pulse inside the filament creates an electrostatic field in its wake. It corresponds to a charge separation in the longitudinal direction, which resembles an electric dipole moving at the velocity of light along its own axis.<sup>5,6,10</sup> Assuming that the plasma can be represented as a cylindrical column of radius  $\rho_0$  and electron density  $n_e$  behind the laser pulse, the energy spectral density of the terahertz radiation emitted by the wake in the unit solid angle reads

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{|j_z^w(\omega)|^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\rho_0^4 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \sin^2 \left[ \frac{L\omega}{2c} (1 - \cos \theta) \right], \quad (1)$$

where  $j_z^w(\omega)$  is the Fourier spectrum of the electron current,  $L$  is the total length of the plasma emitter, and  $\theta$  is the radiation angle with respect to the laser propagation axis  $z$ .<sup>5,6</sup> For a laser pulse of duration  $\tau_L$  and maximum intensity  $I_0$ , having a  $\sin^2$  temporal shape,  $I(t) = I_0 \sin^2(\pi t / \tau_L)$ , the wake current spectrum is written as<sup>6</sup>

$$j_z^w(\omega) = \epsilon_0 E_L \omega_{pe} \frac{\omega + 2i\nu_e}{\omega_{pe}^2 - \omega^2 + i\nu_e \omega} \times \frac{\sin(\omega\tau_L/2)}{1 - (\omega\tau_L/2\pi)^2} \times \exp\left(-\frac{i\omega\tau_L}{2}\right), \quad (2)$$

where  $E_L = e\omega_{pe}I_0/2m_e\epsilon_0c^2\omega_0^2$  is the amplitude of the plasma wave driven by the laser ponderomotive force,  $\omega_{pe} = \sqrt{e^2 n_e / m_e \epsilon_0}$  is the electron plasma frequency,  $\omega_0$  is the laser frequency, and  $\nu_e$  is the electron collision frequency. Due to the short collision time between the free electrons and neutral atoms in the filament plasma, the coherent plasma oscillations driven by the electric field are strongly damped in the collision time scale, which is on the order of  $1/\nu_e \sim 0.1$ – $0.2$  ps. The emission energy  $W$  depends weakly on the filament length (as  $\ln L/\lambda$ ), while the angle of maximum emission,  $\theta_{\max} = (\lambda/L)^{0.5}$ , where  $\lambda = 2\pi c/\omega$  is the radiation wavelength.

In the present experiment, it is reasonable to assume that the ionization process in the air is due to the focused laser pulse, and it is not influenced by the presence of external electric field, which is well below the discharge threshold. However, the external field  $E_e$  can easily exceed the wake electric field  $E_L$  created by the laser ponderomotive force. Therefore, the electrons liberated by the laser field around the peak of the femtosecond pulse are accelerated by the total longitudinal electric field,  $E_e + E_L$ , originated from the laser ponderomotive force and the external field.<sup>5,6,10</sup> Consequently, the electron current spectrum is a sum of two terms,  $j_z = j_z^w + j_z^e$ , where the second term is due to the external electric field,

$$j_z^e(\omega) = \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2 E_e}{\omega^2 - \omega_{pe}^2 + i\nu_e \omega}. \quad (3)$$

This transient longitudinal current  $j_z$  is expected to radiate in the same manner as the electron current produced by the ponderomotive force, except that the emission intensity is greatly enhanced, if the component (3) dominates. It is noticeable that both current spectra in Eqs. (2) and (3) have their maximum at the plasma frequency  $\omega_{pe}$ , while they depend on the frequency  $\omega$  differently. In this study, we concentrate on the relatively low frequency, 0.1 THz. For  $\omega \ll \omega_{pe}, \nu_e$ , it is interesting to note that the two current components exhibit a phase shift of  $90^\circ$  and the emitted energy will be independent of the sign of the field  $E_e$ . In other words, in Eq. (1) the emission intensity should be multiplied by the factor  $(1 + E_e^2/E_L^2)$ , where  $E_w = E_L 2\nu_e \tau_L \omega / \omega_{pe}$ . This factor accounts for a coherent addition of electric currents driven by the ponderomotive force and the external field. Also the length of the plasma filament  $L$  has to be replaced by the distance  $D$  between the electrodes.

In order to verify the dependence on the filament length, we performed the measurements of radiation pattern for the distances  $D=15$  and 60 mm. As a result, the radiation angle  $\theta$  changed from  $25^\circ$  in Fig. 2(a) to  $17^\circ$  in Fig. 2(b). According to the transition-Cherenkov model,<sup>5,6</sup> the angle of the most intense terahertz lobe depends on  $D$  as  $\theta_{\max} = (\lambda/D)^{0.5}$ . Considering the terahertz wavelength  $\lambda=3$  mm at 0.1 THz, the opening angles of terahertz emission for  $D=15$  and 60 mm are  $26^\circ$  and  $14^\circ$ , correspondingly. These values agree well with the experimental observations. In this experiment, the second plane copper electrode with 20 mm hole was re-

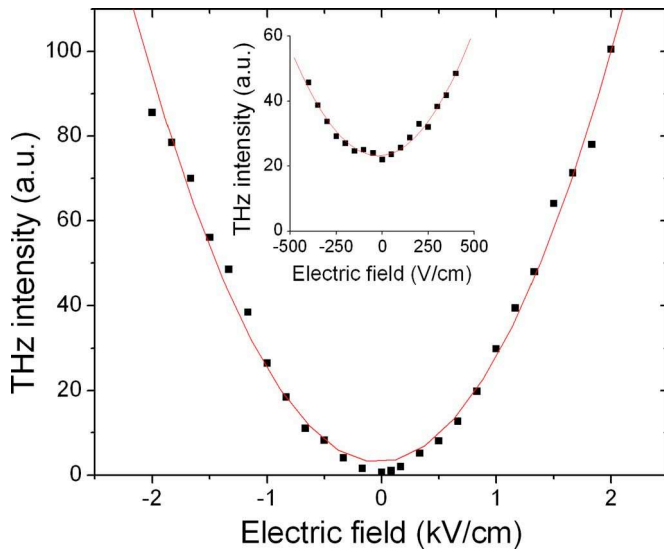


FIG. 3. (Color online) Intensity of the amplified transition-Cherenkov terahertz radiation as a function of the external electric field. The inset presents another independent measurement for small electric fields. The solid lines denote a quadratic fit.

placed by a spherical electrode placed 2 mm under the filament. The terahertz radiation was partially blocked, and therefore the terahertz signal amplitudes could not be compared.

The variation of the terahertz signal intensity is presented in Fig. 3 as a function of the applied electric field. The positive (negative) electric field denotes the situation where the voltage  $V$  was positive (negative). In the inset, the result for a low field is presented. There, the offset of the terahertz intensity at zero voltage corresponds to the pure transition-Cherenkov emission. Based on the significant enhancement of the terahertz in the presence of biased field, we come to the conclusion that the electric current driven by the external field  $E_e$  greatly exceeds the current induced by the ponderomotive force. The symmetrical quadratic dependence of the terahertz intensity on the field  $E_e$  is consistent with Eq. (1) multiplied by the factor  $(1 + E_e^2/E_w^2)$ . Moreover, a hundred

time enhancement of the terahertz signal for  $E_e = 2$  kV/cm provides a direct estimate of the strength of the ponderomotively driven electric field  $E_w = 200$  V/cm, which is in agreement with the theoretical estimate in Ref. 6. A further enhancement of the terahertz could be achieved by applying higher electric field provided it is below the breakdown field of the air.

As a final remark, we would like to mention that the physical picture for terahertz emission discussed here is similar to the surface depletion field induced terahertz radiation in semiconductor terahertz emitters such as InP, and GaAs.<sup>11,12</sup> The difference lies in the fact that in the laser irradiated semiconductors the electron current is created by the surface electric field, which is normal to the sample surface, while in our case it is directed along the laser axis.

In conclusion, the transition-Cherenkov terahertz radiation from femtosecond filament in air is amplified by three orders of magnitude by applying an external longitudinal electric field. The angular distribution and polarization of the amplified terahertz emission are observed to be the same as that of the pure transition-Cherenkov process. The amplification effect is explained by a higher electric current in the wake driven by the external electric field.

<sup>1</sup>D. J. Cook and R. M. Hochstrasser, *Opt. Lett.* **25**, 1210 (2000).

<sup>2</sup>X. Xie, J. Dai, and X.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 075005 (2006).

<sup>3</sup>T. Löffler, F. Jacob, and H. G. Roskos, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 453 (2000).

<sup>4</sup>T. Löffler and H. G. Roskos, *J. Appl. Phys.* **91**, 2611 (2002).

<sup>5</sup>C. D'Amico, A. Houard, M. Franco, B. Prade, A. Mysyrowicz, A. Couaïron, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 235002 (2007).

<sup>6</sup>C. D'Amico, A. Houard, S. Akturk, Y. Liu, J. Le Bloas, M. Franco, B. Prade, A. Couaïron, V. T. Tikhonchuk, and A. Mysyrowicz, *New J. Phys.* **10**, 013015 (2008).

<sup>7</sup>A. Couaïron and A. Mysyrowicz, *Phys. Rep.* **441**, 47 (2007).

<sup>8</sup>A. Houard, Y. Liu, A. Mysyrowicz, and B. Leriche, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 241105 (2007).

<sup>9</sup>A. Houard, Y. Liu, B. Prade, V. T. Tikhonchuk, and A. Mysyrowicz, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 255006 (2008).

<sup>10</sup>A. Proulx, A. Talebpour, S. Petit, and S. L. Chin, *Opt. Commun.* **174**, 305 (2000).

<sup>11</sup>X.-C. Zhang, B. B. Hu, J. T. Darrow, and D. H. Auston, *Appl. Phys. Lett.* **56**, 1011 (1990).

<sup>12</sup>M. B. Johnston, D. M. Whittaker, A. Corchia, A. G. Davies, and E. H. Linfield, *Phys. Rev. B* **65**, 165301 (2002).



# **Bibliographie**

- [1] D. V. Giovanielli and J. F. Kephart and A. H. Williams (1976). *Spectra and angular distributions of electrons emitted from laser-produced plasmas*. **J. Apl. Phys.** **47**, pp. 2907-2910.
- [2] T. Esirkepov, M. Borghesi, S. V. Bulanov, G. Mourou & T. Tajima (2004). *Highly Efficient Relativistic-Ion Generation in the Laser-Piston Regime*. **Phys. Rev. Lett.** **92**, 175003.
- [3] A. V. Gurevich, L. V. Pariiskaya & L. P. Pitaevskii (1965). Zh. Eksp. Teor. Fiz., **49**, 647[Sov. Phys. JETP, **22**, 449 (1966)].
- [4] J. E. Allen & J. G. Andrews (1970). *A note on ion rarefaction waves*. **J. Plasma. Phys.** **4**, p. 187-194.
- [5] J. E. Crow, P. L. Auer & J. E. Allen (1975). *The expansion of a plasma into a vacuum*. **J. Plasma Phys.** **14**, pp 65-76
- [6] J. S. Pearlman & R. L. Morse (1978). *Maximum expansion velocities of laser produced plasmas*. **Phys. Rev. Lett.** **40**, pp. 1652-1655.
- [7] P. Mora (2003). *Plasma Expansion into a Vacuum*. **Phys. Rev. Lett.** **90**, p. 185002.
- [8] P. Mora (2005). *Collisionless expansion of a Gaussian plasma into a vacuum*. **Phys. Plasmas** **12**, p. 112102.
- [9] J. Denavit (1979). *Collisionless plasma expansion into a vacuum*. Phys. Fluids **22**, p. 1384.
- [10] M. A. True, J. R. Albritton, and E. A. Williams (1981). *Fast ion production by suprathermal electrons in laser fusion plasmas*. Phys. Fluids, **24**, p. 1885.
- [11] T. H. Tan and G. H. McCall and A. H. Williams (1984). *Determination of laser intensity and hot-electron temperature from fastest ion velocity measurement on laser-produced plasma*. Phys.Fluids, **27**, pp. 296-301.
- [12] P. Mora (2005). *Thin-foil expansion into a vacuum*. Phys. Rev. E, **72**, 056401.
- [13] T. Grismayer, P. Mora, J. C. Adam & A. Héron (2008). *Electron kinetic effects in plasma expansion and ion acceleration*. Phys. Rev. E, **77**, p. 066407.
- [14] P. Mora & T. Grismayer (2009). *Rarefaction Acceleration and Kinetic Effects in Thin-Foil Expansion into a Vacuum*. Phys. Rev. Lett., **102**, p. 145001.
- [15] R. G. Evans, E. L. Clark, R. T. Eagleton, A. M. Dunne, R. D. Edwards, W. J. Garbett, T. J. Goldsack, S. James, C. C. Smith, B. R. Thomas, R. Clarke, D. J. Neely & S. J. Rose (2005). *Rapid heating of solid density material by a petawatt laser*. Apl. Phys. Lett. , **86**, p. 191505.
- [16] S. B. Hansen, A. Ya. Faenov, T. A. Pikuz, K. B. Fournier, R. Shepherd, H. Chen, K. Widmann, S. C. Wilks, Y. Ping, H. K. Chung, A. Niles, J. R. Hunter, G. Dyer & T. Ditmire (2005). *Temperature determination using  $K\alpha$  spectra from M-shell Ti ions*. Phys. Rev. E, **72**, p. 036408.

- [17] H. Chen, R. Shepherd, H. K. Chung, A. Kemp, S. B. Hansen, S. C. Wilks, Y. Ping, K. Widmann, K. B. Fournier, G. Dyer, A. Faenov, T. Pikuz P. Beiersdorfer (2007). *Fast-electron-relaxation measurement for laser-solid interaction at relativistic laser intensities*. Phys. Rev. E, **76**, p. 056402.
- [18] D. W. Forslund, J. M. Kindel & K. Lee (1977). *Theory of Hot-Electron Spectra at High Laser Intensity*. Phys. Rev. Lett., **39**, pp. 284-288.
- [19] R. L. Morse & C. W. Nielson (1973). *Occurrence of high energy electrons and surface expansion in laser heated target plasmas*. Phys. Fluids, **16**, 909.
- [20] L. M. Wickens, J. E. Allen & P. T. Rumsby (1978) . *Ion Emission from Laser-Produced Plasmas with Two Electron Temperatures*. Phys. Rev. Lett., **41**, 243.
- [21] B. Bezzerides, D. W. Forslund & E. L. Lindman (1978). *Existence of rarefaction shocks in a laser-plasma corona*. Phys. Fluids, **21**, p. 2179.
- [22] M. Passoni, V. T. Tikhonchuk, M. Lontano, and V. Y. Bychenkov. *Charge separation effects in solid targets and ion acceleration with a two-temperature electron distribution (2004)*. Phys. Rev. E, **69**, p. 026411.
- [23] V. Y. Bychenkov, V. N. Novikov, D. Batani, V. T. Tikhonchuk and S. G. Bochkarev (2004). *Ion acceleration in expanding multispecies plasmas*. Phys. Plasmas, **11**, p. 3242.
- [24] C. Thaury, P. Mora, A. Héron & J. C. Adam (2010). *Influence of the Weibel instability on the expansion of a plasma slab into a vacuum*. Phys. Rev. E, **82**, p. 026408.
- [25] S. G. Bochkarev, V. Y. Bychenkov & V. T. Tikhonchuk (2006). *Investigation of Ion acceleration in an Expanding Laser Plasma by Using a Hybrid Boltzmann-Vlasov-Poisson Model*. Plasma Phys. Reports, **32**, pp. 205-221.
- [26] V. T. Tikhonchuk, A. A. Andreev, S. G. Bochkarev, & V. Y. Bychenkov (2005). *Ion acceleration in short-laser-pulse interaction with solid foils*. Plasma Phys. Controlled Fusion, **47**, p. B869.
- [27] P. Gibbon & A. R. Bell (1992). *Collisionless Absorption in Sharp-Edged Plasmas*. Phys. Rev. Lett. **68**, p. 10.
- [28] F. Brunel (1987). *Not-so-resonant, resonant absorption*. Phys. Rev. Lett., **59**, pp. 52–55.
- [29] F. N. Beg, A. R. Bell, A. E. Dangor, C. N. Danson, A. P. Fews, M. E. Glinsky, B. A. Hammel, P. Lee, P. A. Norreys & M. Tatarakis (1997). *A study of picosecond laser–solid interactions up to  $10^{19} \text{ W cm}^{-2}$* . Phys. Plasmas, **4**, pp. 447-457.
- [30] W. L. Kruer & Kent Estabrook (1985).  *$\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  heating by very intense laser light*. Phys. Fluids **28**, pp. 430-432.
- [31] S. C. Wilks, A. B. Langdon, T. E. Cowan, M. Roth, M. Singh, S. Hatchett, M. H. Key, D. Pennington, A. MacKinnon & R. A. Snavely (2001). *Energetic proton generation in ultra-intense laser-solid interactions*. Phys. Plasmas, **8**, p. 542–549.

- [32] M. Borghesi, J. Fuchs, S. V. Bulanov, A. J. Mackinnon, P. K. Patel & M. Roth (2006). *Fast ion generation by high-intensity laser irradiation of solid targets and applications*. Fusion Sci. Technol., **49**, 412.
- [33] J. Fuchs, P. Antici, E. d'Humières, E. Lefebvre, M. Borghesi, E. Brambrink, C. A. Cecchetti, M. Kaluza, V. Malka, M. Manclossi, S. Meyroneinc, P. Mora, J. Schreiber, T. Toncian, H. Pépin & P. Audebert (2006). *Laser-driven proton scaling laws and new paths towards energy increase*. Nature Phys., **2**, pp. 48-54.
- [34] H. A. Bethe (1942). Office Sci. Res. Rep. 545 [dans *Classic Papers in Shock Compression Science*, edited by J. W. Johnson and R. Cheret (Springer Verlag, Heidelberg 1998)].
- [35] Ya. B. Zeldovich & Yu. P. Raizer (2002). *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Dover Publications, Inc.)
- [36] L. Robson, P. T. Simpson, R. J. Clarke, K. W. D. Ledingham, F. Lindau, O. Lundh, T. McCanny, P. Mora, D. Neely, C.-G. Wahlström, M. Zepf & P. McKenna (2007). *Scaling of proton acceleration driven by petawatt-laser-plasma interaction*. Nature Phys., **3**, 58.
- [37] R. A. Snavely, M. H. Key, S. P. Hatchett, T. E. Cowan, M. Roth, T. W. Phillips, M. A. Stoyer, E. A. Henry, T. C. Sangster, M. S. Singh, S. C. Wilks, A. MacKinnon, A. Offenberger, D. M. Pennington, K. Yasuike, A. B. Langdon, B. F. Lasinski, J. Johnson, M. D. Perry & E. M. Campbell (2000). *Intense high-energy proton beams from petawatt-laser irradiation of solids*. Phys. Rev. Lett., **85**, p. 2945–2948.
- [38] M. Roth (2011). *Target Normal Sheath Acceleration (TNSA) Mechanism*. Lesson at the 68th Scottish Universities Summer School in Physics.
- [39] M. Roth, A. Blazevic, M. Geissel, T. Schlegel, T. E. Cowan, M. Allen, J.-C. Gauthier, P. Audebert, J. Fuchs, J. Meyer-ter-Vehn, M. Hegelich, S. Karsch & A. Pukhov (2002). *Energetic ions generated by laser pulses : A detailed study on target properties*. Phys. Rev. Spec. Topic Accelerators Beams, **5**, 061002.
- [40] L. M. Wickens & J. E. Allen (1979). *Free expansion of a plasma with two electron temperatures*. J. Plasma Phys. **22**, p. 167.
- [41] A. J. Mackinnon, Y. Sentoku, P. K. Patel, D. W. Price, S. Hatchett, M. H. Key, C. Andersen, R. Snavely & R. R. Freeman (2002). *Enhancement of Proton Acceleration by Hot-Electron Recirculation in Thin Foils Irradiated by Ultraintense Laser Pulses*. Phys. Rev. Lett., **88**, 215006.
- [42] S. Buffechoux, J. Psikal, M. Nakatsutsumi, L. Romagnani, A. Andreev, K. Zeil, M. Amin, P. Antici, T. Burris-Mog, A. Compant-La-Fontaine, E. d'Humières, S. Fourmaux, S. Gaillard, F. Gobet, F. Hannachi, S. Kraft, A. Mancic, C. Plaisir, G. Sarri, M. Tarisien, T. Toncian, U. Schramm, M. Tampo, P. Audebert, O. Willi, T. E. Cowan, H. Pépin, V. Tikhonchuk, M. Borghesi & J. Fuchs (2010). *Hot Electrons Transverse Refluxing in Ultraintense Laser-Solid Interactions*. Phys. Rev. Lett., **105**, 015005.
- [43] L. Romagnani, J. Fuchs, M. Borghesi, P. Antici, P. Audebert, F. Ceccherini, T. Cowan, T. Grismayer, S. Kar, A. Macchi, P. Mora, G. Pretzler, A. Schiavi, T. Toncian & O.

- Willi (2005) *Dynamics of Electric Fields Driving the Laser Acceleration of Multi-MeV Protons*. Phys. Rev. Lett. **95**, page 195001.
- [44] M. Schollmeier S. Becker, M. Geißel, K. A. Flippo, A. Blažević, S. A. Gaillard, D. C. Gautier, F. Grüner, K. Harres, M. Kimmel, F. Nürnberg, P. Rambo, U. Schramm, J. Schreiber, J. Schütrumpf, J. Schwarz, N. A. Tahir, B. Atherton, D. Habs, B. M. Hegelich & M. Roth (2008). *Controlled transport and focusing of laser-accelerated protons with miniature magnetic devices*. Phys. Rev. Lett. **101**, p. 055004.
- [45] T. Toncian, M. Borghesi, J. Fuchs, E. d'Humières, P. Antici, P. Audebert, E. Brambrink, C. A. Cecchetti, A. Pipahl, L. Romagnani, O. Willi (2006). *Ultrafast laser-driven microlens to focus and energy-select mega-electron volt protons*. Science **312**, pp. 410-413.
- [46] A. Noda *et al.* A. Noda, S. Nakamura, Y. Nakamura, S. Sakabe, M. Hashida, T. Shirai, S. Shimizu, H. Tongu, H. Ito, H. Souda, A. Yamazaki, M. Tanabe, H. Daido, M. Mori, M. Kado, A. Sagisaka, K. Ogura, M. Nishiuchi, S. Orimo, Y. Hayashi, A. Yogo, S. Bulanov, T. Esirkepov, A. Nagashima, T. Kimura, T. Tajima, T. Takeuchi, K. Matsukado, A. Fukumi & Z. Li (2006). *Phase rotation scheme of laser-produced ions for reduction of the energy spread*. Laser Phys. **16**, 647-653.
- [47] D. Haberberger, S. Tochitsky, F. Fiuza, C. Gong, R. A. Fonseca, L. O. Silva, W. B. Mori & C. Joshi (2012). *Collisionless shocks in laser-produced plasma generate monoenergetic high-energy proton beams*. Nat. Phys., **8**, pp. 95-99.
- [48] A. Macchi *et al.* A. Macchi, F. Cattani, T. V. Liseykina & F. Cornolti (2005). *Laser acceleration of ion bunches at the front surface of overdense plasmas*. Phys. Rev. Lett., **94**, 165003.
- [49] A. P. L. Robinson, M. Zepf, S. Kar, R. G. Evans & C. Bellei (2008). *Radiation pressure acceleration of thin foils with circularly polarized laser pulses*. N. J. Phys., **10**, 013021.
- [50] A. Henig, S. Steinke, M. Schnürer, T. Sokollik, R. Hörlein, D. Kiefer, D. Jung, J. Schreiber, B. M. Hegelich, X. Q. Yan, J. Meyer-ter-Vehn, T. Tajima, P. V. Nickles, W. Sandner & D. Habs (2009). *Radiation-Pressure Acceleration of Ions Beams Driven by Circularly Polarized Laser Pulses*. Phys. Rev. Lett., **103**, 245003.
- [51] B. G. Logan, L. J. Perkins & J. J. Barnard (2008). *Direct drive heavy-ion-beam inertial fusion at high coupling efficiency*. Phys. Plasmas, **15**, 072701.
- [52] M. Tabak, J. Hammer, M. E. Glinsky, W. L. Kruer, S. C. Wilks, J. Woodworth, E. M. Campbell, M. D. Perry & R. J. Mason (1994), *Ignition and high gain with ultrapowerful lasers*. Phys. Plasmas, **1**, pp. 1626-1634,
- [53] D. Schardt, I. Schall, H. Geissel, H. Irnich, G. Kraft, A. Magel, M. F. Mohar, G. Münzenberg, F. Nickel, C. Scheidenberger, W. Schwab & L. Sihver (1996). *Nuclear Fragmentation High-Energy Heavy-Ion Beams In Water*. Avd. Space Res. **17**, pp. 87-94.
- [54] K. W. Ledingham, W. Galster & R. Sauerbrey (2007). *Laser-driven proton oncology - a unique new cancer therapy ?*. The Br. J. Radiol., **80** p. 855-858.

- [55] U. Linz & J. Alonso (2007), *What will it take for laser driven proton accelerators to be applied to tumor therapy ?*. Phys. Rev. ST Accel. Beams, **10**, page 094801.
- [56] M. Borghesi, D. H. Campbell, A. Schiavi, M. G. Haines, O. Willi, A. J. MacKinnon, P. Patel, L. A. Gizzi, M. Galimberti, R. J. Clarke, F. Pegoraro, H. Ruhl & S. Bulanov (2002). *Electric field detection in laser-plasma interaction experiments via the proton imaging technique*. Phys. Plasmas **9**, p. 2214-2220.
- [57] P. McKenna. *Fast electron generation and transport (2011)*. Lesson at the 68th Scottish Universities Summer School in Physics.
- [58] Dimitri Mihalas & Barbara Weibel Mihalas (1984). *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. New York Oxford University Press.
- [59] N. A. Krall & A. W. Trivelpiece (1986). *Principles of Plasma Physics*. San Francisco Press, Inc.
- [60] P. Mora (2011). *Introduction aux plasmas créés par laser*. Cours Ecole Polytechnique, chapitre 2.
- [61] L. D. Landau & E. N. Lifshitz (1976). *Mechanics, 3rd Ed*. Butterworth-Heinemann.
- [62] P. Mora & R. Pellat (1979). *Self-similar expansion of a plasma into a vacuum*. Phys. Fluids **22**, p. 2300-2304.